B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 2 2007

Bogusław GUZIK*

USTALANIE EFEKTYWNOŚCI OBIEKTÓW GOSPODARCZYCH NA PODSTAWIE IZOKWANT EFEKTYWNOŚCI CZĄSTKOWEJ

Opisano metodę ustalania efektywności, polegającą na wyznaczeniu dla porównywanych obiektów gospodarczych ich izokwant w przestrzeni wydajności czynników. Następnie określono granicę efektywności, czyli krawędź taką, że wszystkie izokwanty są przez nią zdominowane. Efektywność obiektu jest oceniana na podstawie liczonej wzdłuż przyjętego promienia technologicznego odległości izokwanty od granicy efektywności. Dla ilustracji rozpatrzono przypadek jednego wyniku i dwóch nakładów. Uogólnienia na przypadek jednego wyniku i wielu nakładów lub jednego nakładu i wielu wyników są bezpośrednie.

Słowa kluczowe: *izokwanta, efektywność, izokwanta w przestrzeni wydajności, granica efektywności*

1. Wstęp

Źródłem artykułu są doświadczenia nad stosowaniem powszechnie już w polskiej literaturze ekonomicznej znanej metody DEA. W jej aplikacjach intrygujące jest to, że zazwyczaj uzyskuje się bardzo wiele obiektów w charakterze najbardziej efektywnych. Choć liczbę tę można uzasadnić formalnymi własnościami rozwiązywanych w metodzie DEA zadań programowania liniowego, intuicyjnie jest rzeczą „podejrzaną”, iż obiektów w pełni efektywnych jest tak dużo.

W artykule opisano pozbawioną tej wady metodę ustalania efektywności. Polega ona na wyznaczeniu – dla poszczególnych porównywanych obiektów – izokwant w przestrzeni wydajności czynników. Następnie określa się granicę efektywności, czyli krawędź taką, że wszystkie izokwanty są odeń nie lepsze. Efektywność obiektu ustala się na podstawie odległości jego izokwanty od granicy efektywności, liczonej wzdłuż przyjętego promienia technologicznego. Promień technologiczny

* Katedra Ekonometrii, Akademia Ekonomiczna, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, e-mail: b.guzik@ae.poznan.pl

odpowiada założonej proporcji nakładów lub założonej proporcji wydajności czynników.

Proponowaną metodę omówiono na tle bardzo prostego przypadku, gdy przy użyciu dwóch czynników uzyskuje się jeden wynik[1]. To ograniczenie bierze się tylko ze względów ilustracyjnych (możliwe jest prezentowanie danych na wykresach płaskich). Uogólnienie na przypadek jednego wyniku i wielu nakładów lub jednego nakładu i wielu wyników jest bezpośrednie. Uogólnienia na przypadek koincydencji wielu wyników i wielu nakładów nie udało się uzyskać.

2. Przykład ustalania efektywności za pomocą metody DEA

W metodzie DEA rozpatruje się przypadek, w którym można uzyskać wiele wyników przy zastosowaniu wielu nakładów (np. stosując wiele czynników produkcji). Rozpatrzymy jednak znacznie prostszą sytuację, gdy jeden wynik jest otrzymywany przy użyciu dwóch nakładów. Przykład ten będzie osnową niniejszego artykułu.

Przykład

Dany jest zbiór sześciu obiektów gospodarczych. W tabeli 1 podano wielkość uzyskanego wyniku działalności (Y) *i poniesionych na nią nakładów* (X_1, X_2). *Należy ustalić efektywność poszczególnych obiektów.*

Tabela 1. Nakłady i wyniki

Obiekty:		O1	O2	O3	O4	O5	O6
Wynik	Y	3	2	6	4	1	3
Nakłady	X_1	4	3	9	4	2	5
	X_2	2	1	12	8	6	2

Ź r ó d ł o: Dane umowne.

Dane analogiczne do podanych w tabeli 1 mogą dotyczyć dwóch sytuacji:

a) obiekty rzeczywiście wytwarzają jeden wynik (np. zysk) przy użyciu kilku czynników;

[1] Badanie *efektywności* (czyli kształtowania się *efektu*) może dotyczyć *wyniku* działalności lub *kosztu* działalności. Dlatego zamiast powszechnie w literaturze spotykanego zwrotu „efekt" na oznaczenie wyniku, używamy jednak słowa *wynik*, bo efektem w przypadku badania efektywności kosztowej jest *koszt*. Mówiąc o wyniku *efekt*, mielibyśmy efektywność „*efektową*".

Z tego powodu należy mówić o modelu zorientowanym *na nakłady* (efektywność kosztowa) oraz modelu zorientowanym na *wyniki* (efektywność wynikowa).

b) w obiektach otrzymuje się kilka wyników przy użyciu kilku czynników, z tym że potrafiono rozdzielić całkowite nakłady poszczególnych czynników pomiędzy poszczególne wyniki. Nakład w tabeli 1 oznacza wtedy nakład danego czynnika, *poświęcony na* otrzymanie rozpatrywanego wyniku, a efektywność jest badana ze względu na ten pojedynczy wynik.

W celu rozwiązania sformułowanego problemu można zastosować wybrany wariant metody DEA. Na przykład, stosując standardowy (klasyczny) wariant CCR[2] metody DEA zorientowanej na nakłady (por. np. Rogowski [1998, s. 138]), dla każdego obiektu trzeba rozwiązać następujące zadanie decyzyjne:

Liniowe zadanie decyzyjne dla obiektu *o*-tego ($1 \le o \le 6$)

I. Dane:

y_j *– poziom wyniku w obiekcie j-tym* ($j = 1, \ldots, J$); *w przykładzie* $J = 6$;

x_{rj} *– zużycie czynnika r-tego w obiekcie j-tym* ($r = 1, ..., R$), *w przykładzie* $R = 2$.

II. Zmienne decyzyjne:

$$\theta_o \ ; \quad \lambda_1^o, \lambda_2^o, \ldots, \lambda_6^o. \tag{1}$$

III. Funkcja celu

$$\theta_o \ \to \ \min . \tag{2}$$

IV. Warunki ograniczające:

$$3\,\lambda_1^o + 2\,\lambda_2^o + 6\,\lambda_3^o + 4\,\lambda_4^o + 1\,\lambda_5^o + 3\,\lambda_6^o = y_0 \qquad \text{[efekt]} \tag{3}$$

$$4\,\lambda_1^o + 3\,\lambda_2^o + 9\,\lambda_3^o + 4\,\lambda_4^o + 2\,\lambda_5^o + 5\,\lambda_6^o = x_{1o}\,\theta_o \quad \text{[nakład } X_1\text{]} \tag{4}$$

$$2\,\lambda_1^o + 1\,\lambda_2^o + 12\,\lambda_3^o + 8\,\lambda_4^o + 6\,\lambda_5^o + 2\,\lambda_6^o = x_{2o}\,\theta_o. \quad \text{[nakład } X_2\text{]} \tag{5}$$

V. Warunki znakowe nałożone na wartości zmiennych:

$$\begin{gathered} \lambda_1^o, ..., \lambda_6^o \ge 0; \\ 0 < \theta_o \le 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Ideą zadania jest znalezienie – dla danego obiektu *o*-tego:

- takich współczynników $\{\lambda_j^o; j = 1, \ldots, J\}$ „optymalnej” kombinacji technologii stosowanych przez poszczególne obiekty,
- takiego współczynnika θ_o ($0 < \theta_o \le 1$) proporcjonalnych zmian nakładów w obiekcie *o*-tym, że:

---

[2] Jak wiadomo, metodę DEA zaproponowali Charnes, Cooper i Rhodes w 1978 r. Praca ta wymieniana jest prawie we wszystkich opracowaniach, dotyczących metody DEA.

a) „kalkulowany" wynik optymalnej kombinacji technologii poszczególnych obiektów jest równy empirycznemu efektowi obiektu o-tego; mówi o tym warunek (3)[3];

b) „kalkulowany" nakład każdego z czynników jest nie większy (bo $\theta_o \leq 1$) od empirycznego nakładu tego czynnika w obiekcie o-tym; mówią o tym warunki (4) i (5).

Dotyczącym obiektu o-tego „potencjalnym" wynikiem zastosowania „optymalnej" kombinacji technologii, pochodzących z poszczególnych obiektów, jest lewa strona warunku [*efekt*], czyli

$$\widetilde{y}_o = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j^o y_j \, . \tag{7}$$

Rzeczywistą technologię stosowaną w obiekcie o-tym reprezentuje natomiast wektor nakładów-wyników, podany w odpowiedniej kolumnie macierzy współczynników warunków ograniczających (czyli w przykładzie – w odpowiedniej kolumnie tabeli 1).

Z kolei „potencjalnym" nakładem czynnika r-tego w „optymalnej" kombinacji technologii jest lewa strona odpowiedniego warunku [*nakład*]:

$$\widetilde{x}_{ro} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^o x_{rj} \, . \tag{8}$$

Jeśli $\theta_o < 1$, to „optymalna" kombinacja technologii z innych obiektów – dając wynik taki, jaki uzyskano w obiekcie o-tym, o czym mówi warunek (3) – wymaga *mniejszych* nakładów niż te, które rzeczywiście poczyniono w obiekcie o-tym[4]. Oznacza to, iż obiekt o-ty jest *nieefektywny*[5]. W szczególności, w tym wypadku, „własny" współczynnik kombinacji dla obiektu o-tego wynosi $\lambda_o^o = 0$.

Jeśli zaś $\theta_o = 1$, to optymalna kombinacja technologii z poszczególnych obiektów jest tak samo efektywna, jak technologia zastosowana w o-tym obiekcie. Taki sam wynik jak wynik empiryczny uzyskuje się bowiem przy tym samym co w obiekcie o-tym poziomie nakładów. Przypadek $\theta^o = 1$ uznaje się więc za symptom *100% efektywności* obiektu o-tego. W tym wypadku, $\lambda_o^o = 1$, a pozostałe $\lambda_j^o = 0$.

Przykład

W tabeli 2 podano, dotyczące poszczególnych obiektów o = 1, ..., *J, rozwiązania zadań* (1)–(6), *otrzymane według wariantu CCR metody DEA ukierunkowa-*

[3] Przy tym „optymalna" kombinacja dla obiektu o-tego może zawierać technologię „własną", stosowaną w obiekcie o-tym.

[4] Potencjalny nakład r-ty stanowi $\theta_o \cdot 100\%$ nakładu autentycznego (x_{ro}) w tym obiekcie.

[5] Ponieważ model postuluje osiągnięcie możliwie najmniejszych nakładów, przy których uzyskuje się ten sam wynik, mówi się w tym wypadku o modelu *zorientowanym na nakłady*.

nej na nakłady. Wartości w wierszu obiektu o-tego oznaczają współczynniki $\lambda_1^o, ..., \lambda_6^o; \theta_o$.

Tabela 2. Rozwiązania optymalne zadań (1)–(6)

Obiekt	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	θ
O1	**1**	0	0	0	0	0	**1**
O2	0	**1**	0	0	0	0	**1**
O3	0,7500	0	0	0,9375	0	0	**0,750**
O4	0	0	0	**1**	0	0	**1**
O5	0	0	0	0	**1**	0	**1**
O6	0,4286	0,8571	0	0	0	0	**0,857**

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

Według tego rozwiązania mamy aż cztery w pełni (*100-procentowo*) *efektywne obiekty. Są to*: *O1, O2, O4 oraz O5*. *Efektywność obiektu O3 wynosi* 75,0%, *a obiektu O6* – 85,7%.

Dodajmy, że:

• *jeśli zastąpimy równania* (3),(4),(5) *odpowiednimi nierównościami, to otrzymamy trzy obiekty efektywne: O1, O2, O4*;

• *jeśli zaś przyjąć schemat zmiennego efektu skali* (*równa 1 suma współczynników* λ_j^o *dla ustalonego obiektu o-tego*[6]), *to metoda DEA sugeruje*, *że efektywne są O3, O4, O5* [7].

Rozbieżności wyników przy różnych założeniach są zrozumiałe. Mało jednak zrozumiałe jest to, iż metoda DEA (przynajmniej w jej wariantach podstawowych) przypuszczalnie znacznie przeszacowuje liczbę obiektów efektywnych. Dość wątpliwe z punktu widzenia intuicji ekonomicznej wydaje się bowiem, by połowa – a nawet 2/3, czy niekiedy nawet więcej obiektów – była efektywna[8]. Jeśli pod pojęciem *efektywny* rozumieć swego rodzaju *wzorzec*, to trudno zaakceptować typowe dla metody DEA sytuacje, iż prawie wszystkie (lub większość) obiekty są wzorcami.

W opracowaniu spróbowano zatem wykorzystać inne podejście, zbieżne z klasycznymi poglądami na temat efektywności, którą intuicyjnie rozumie się jako optymalność przekształcania nakładów w efekty.

[6] Dotychczasowe obliczenia dopuszczały, aby suma tych współczynników była różna od 1.

[7] W tym przypadku obliczenia dotyczą wersji modelu, przedstawionej w artykule [2005, s. 58].

[8] Poszukując analogii, np. w zakresie ekonometrycznych (niekiedy nazywanych parametrycznymi) modeli efektywności, przypadek bardzo dużej liczby 100% efektywnych obiektów występuje tylko wtedy, gdy prawie wszystkie obserwacje empiryczne znajdują się na modelu. Oznacza to, że współczynnik determinacji jest rzędu przynajmniej 0,99, co praktycznie biorąc jest niezwykle rzadkie.

3. Izokwanta efektu cząstkowego (*ICE*)

Rozważania na temat izokwant są standardem w optymalizacji wielkości ekonomicznych. Podobnie jest zresztą w metodzie DEA. W jej przypadku ilustracje dotyczą porównania nakładów i wyników (zob. np. ilustracje w pracach: Rogowski [1999, s. 148], Gospodarowicz [2000, s. 34], Kopczewski [2000, s. 32]; Pawłowska [2005, s. 23 oraz 38], Domagała [2006]). Czasami mówi się w tym przypadku o izokwantach w *przestrzeni nakładów* (np. Prędki [2002, s. 123]).

Tutaj opisujemy nieco inne podejście – wykorzystamy izokwanty w przestrzeni *wydajności czynników*.

Dalej zakładamy, że nakłady są względem siebie substytucyjne. Można to założenie zawęzić, np. że substytucja ma miejsce tylko w pewnym stopniu. Tego jednak – przynajmniej dla wyjaśnienia idei podejścia – nie musimy przesądzać. Zakładamy także, iż izokwanty podano w postaci jednostkowej. Podano więc takie wielkości A_1 oraz A_2, że przy nakładach X_1 oraz X_2 wynik wynosi 1:

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 = 1. \tag{9}$$

Badanie izokwant jednostkowych nie powoduje utraty ogólności[9], a jest wygodniejsze.

Tradycyjna izokwanta wyniku to funkcja względem nakładów X_r, której współczynniki są znane:

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 = 1. \tag{10}$$

Określa ona, jakie powinny być *nakłady* X_1 oraz X_2, żeby – przy danych współczynnikach a_1, a_2 wydajności nakładów – osiągnąć wynik jednostkowy.

Z równania (9) – co oczywiste – można jednak wyprowadzić inny rodzaj izokwanty, w której zmiennymi będą wydajności czynników a parametrami – wielkości nakładów:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 = 1. \tag{11}$$

Taka izokwanta określa, jaka – przy danym poziomie nakładów x_1, x_2 – powinna być *wydajność* poszczególnych czynników A_1, A_2, żeby uzyskać wynik jednostkowy.

Wobec substytucji nakładów niezbędnych dla wytworzenia danego wyniku równanie (11) oznacza, że możliwa (konieczna) jest *substytucja wydajności czynników*, a więc, że w ślad za zmniejszeniem wydajności jednego czynnika można (trzeba) zwiększyć wydajność drugiego.

---

[9] Gdyż każdą izokwantę z wyrazem wolnym $c > 0$ otrzymujemy w wyniku mnożenia współczynnika izokwanty jednostkowej przez c.

Wydajność jest swego rodzaju *cząstkową* efektywnością danego nakładu w stosunku do danego efektu. Będziemy więc mówić o izokwancie efektu cząstkowego (*ICE*). W rozpatrywanym obecnie przypadku ów efekt cząstkowy dotyczy wydajności czynnika, co można zaznaczyć pisząc ICE_W. Nie będziemy tego robić, by nie komplikować notacji. Takie właśnie izokwanty, jak wspomniano, będą wykorzystywane do określania efektywności obiektów.

Dalej zakładamy, co oczywiste, że wszystkie współczynniki izokwant są *nieujemne*[10].

4. Izokwanty efektu cząstkowego w przestrzeni wydajności

Ukierunkowana na wydajność izokwanta efektu cząstkowego ma postać:

$$W_1 x_1 + W_2 x_2 = 1. \tag{12}$$

Argumenty tej izokwanty to *wydajności* W_1, W_2 poszczególnych czynników przy wytwarzaniu Y. Parametrami są natomiast zanotowane wielkości nakładów x_1, x_2 obu czynników. Izokwanta (12) określa takie kombinacje wydajności obu czynników, dla których przy ustalonym zasobie czynników uzyskuje się dany (tu: jednostkowy) efekt. Wymiar zmiennej W_r to

[jednostka pomiaru efektu]/[jednostkę pomiaru czynnika r-tego][11].

Przykład

W tabeli 3 podano dotyczące naszego przykładowego problemu nakłady na jednostkę wyniku. Na przykład w obiekcie O1 dla uzyskania jednostki wyniku zużyto 4/3 jednostek nakładu nr 1 oraz 2/3 jednostki nakładu nr 2, w obiekcie O2 natomiast dla uzyskania jednostki wyniku zużywa się więcej nakładu nr 1 (1,5 jednostki nakładu), ale mniej nakładu drugiego (0,5 jednostki). Na pytanie, który z tych obiektów jest bardziej efektywny, a ściślej – technologia którego obiektu jest bardziej efektywna, na pierwszy rzut oka nie da się więc powiedzieć, pierwszy bowiem jest efektywniejszy w zakresie wydajności czynnika X_1*, drugi – w zakresie wydajności czynnika* X_2.

[10] Gdyby jakiś współczynnik był ujemny, oznaczałoby to, że czynnik jest *komplementarny*, a nie substytucyjny.

[11] Na przykład jeśli efekt mierzony jest w sztukach, nakład X_1 – w mln zł, a nakład X_2 – w osobach, to b_1 ma wymiar szt./mln zł, a b_2 – wymiar szt./osobę.

Tabela 3. Nakłady jednostkowe

Obiekty		O1	O2	O3	O4	O5	O6
Efekty	Y	1	1	1	1	1	1
Nakłady	X_1	1,33333	1,5	1,5	1	2	1,66667
	X_2	0,66667	0,5	2	2	6	0,66667

Źródło: Obliczenia własne.

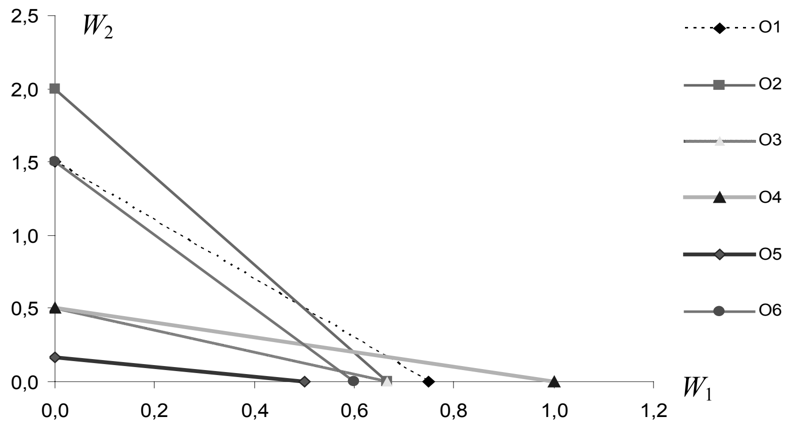
Izokwanty w przestrzeni wydajności dla naszego przykładu są następujące:

I_1: 1,333 W_1 + 0,667 W_2 = 1; I_4: 1,0 W_1 + 2,0 W_2 = 1;

I_2: 1,5 W_1 + 0,5 W_2 = 1; I_5: 2,0 W_1 + 6,0 W_2 = 1;

I_3: 1,5 W_1 + 2,0 W_2 = 1; I_6: 1,667 W_1 + 0,667 W_2 = 1;

Przedstawiono je na rysunku 1.



Rys. 1. Izokwanty dla obiektów w przestrzeni wydajności czynników
Uwaga: Linia O1 oznacza jednostkową izokwantę efektu dla obiektu O1.
Źródło: Opracowanie własne na podstawie tabeli 3.

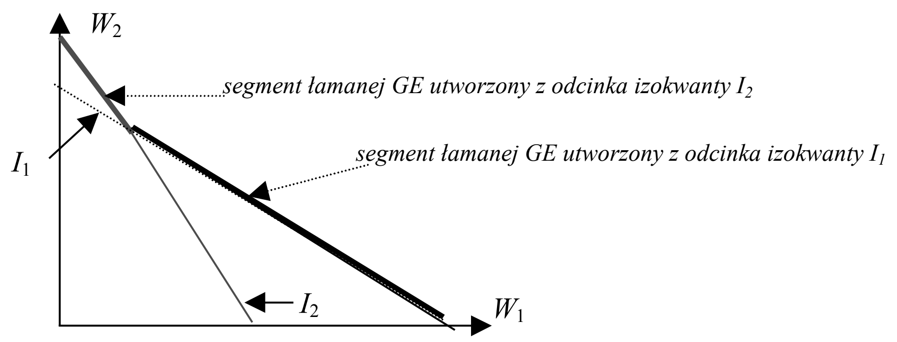
Z rysunku 1 wynika, że technologia stosowana w obiekcie O5 na pewno jest nieefektywna, bowiem jej wydajności w_1 oraz w_2 (odpowiednie punkty na osi W_1 oraz osi W_2) są najmniejsze ze wszystkich, a izokwanta dla tego obiektu jest całkowicie zdominowana przez inne. Podobnie ma się sprawa z izokwantą dla obiektu O3, nad którą dominują praktycznie wszystkie izokwanty, z wyjątkiem izokwanty dla obiektu O5.

5. Granica efektywności w przestrzeni wydajności czynników

Niech (z, g) oznacza punkt z pewnej łamanej L w przestrzeni wydajności, odpowiadający wartości $W_1 = z$, $W_2 = g$, oraz niech (z, i) oznacza punkt izokwanty jednostkowej I przy wartości $W_1 = z$.

Przy $W_1 = z$ łamana L dominuje nad izokwantą I, gdy współrzędna $g \geq i$. (13)

Granicą efektywności w przestrzeni wydajności (GE_W) nazwiemy *łamaną* taką, że dla każdej wartości z zmiennej W_1 dominuje ona nad wszystkimi izokwantami ICE_W dla badanych obiektów $j = 1, ..., J$. (14)



Rys. 2. Granica efektywności a izokwanty w przestrzeni wydajności
Źródło: Opracowanie własne.

Dominacja granicy efektywności GE_W nad izokwantą typu ICE_W oznacza, że dla każdego punktu z tej granicy izokwanta leży bliżej (a ogólnie nie dalej) początku układu współrzędnych niż granica efektywności (por. rys. 2)[12].

Dominacja granicy efektywności nad izokwantą ICE_W algebraicznie oznacza, że dla wszystkich punktów z granicy efektywności wartość lewej strony izokwanty jest *nie mniejsza* od 1[13].

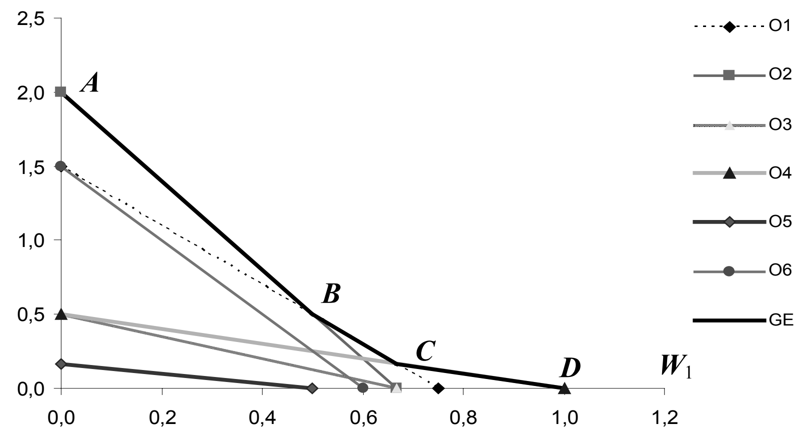
[12] O tym sposobie mierzenia odległości między izokwantą a granicą efektywności będzie mowa w dalszej części rozdziału. Sposób ten jest zresztą powszechnie znany w pracach z zakresu efektywności gospodarczej (w szczególności w DEA).

[13] W punkcie wziętym z danej izokwanty jednostkowej wynik wynosi 1. Jeśli weźmiemy punkt powyżej izokwanty, to wartość lewej strony równania będzie większa od 1, gdyż wzięto lepszą (wydajniejszą) kombinację czynników (a formalnie dlatego, że współczynniki izokwanty są dodatnie i wszystkie współrzędne są nie mniejsze od poprzednich, a przynajmniej jedna jest większa).

Dalej będziemy rozpatrywać granicę efektywności, która składa się z segmentów odpowiednich izokwant *ICE*, czyli granicę *najmniej odległą* od pęku izokwant $\{I_j; j = 1, ..., J\}$ – por. rys. 2.

Przykład

Granicę efektywności dla naszego przykładu przedstawiono na rysunku 3. Jest to pogrubiona łamana ABCD. Po rozwiązaniu odpowiednich układów równań przekonujemy się, że punkty A, B, C, D mają współrzędne: $A(0, 2)$; $B(0,5, 0,5)$; $C(0,6667, 0,1667)$, $D(1, 0)$. *Na odcinku AB granicą efektywności jest segment izokwanty* I_2, *na odcinku BC – segment izokwanty* I_1, *a na odcinku CD – segment izokwanty* I_4.



Rys. 2. Granica efektywności
Źródło: Opracowanie własne na podstawie rysunku 1.

Równanie granicy efektywności jest następujące:

$$GE: \begin{cases} 1,5 w_1 + 0,5 w_2 = 1 & \text{dla} \quad 0 \le w_1 \le 0,5 \\ 1,333\, w_1 + 0,667\, w_2 = 1 & \text{dla} \quad 0,5 \le w_1 \le 0,667 \\ 1,0 w_1 + 2,0 w_2 = 1 & \text{dla} \quad 0,667 \le w_1 \le 1 \end{cases}.$$

Wszystkie punkty leżące na granicy efektywności ABCD są w pełni efektywne. Leżące poniżej – mają efektywność mniejszą. Punkty płaszczyzny leżące powyżej granicy efektywności nie należą do dziedziny miernika efektywności.

Uwagi

1. Granica efektywności niekoniecznie musi być wyznaczana tylko na podstawie danych empirycznych. Jeśli określono pewną postulowaną technologię, czyli postulowane nakłady czynników dające określony efekt (lub postulowany efekt przy danym nakładzie czynników), można tę informację potraktować jako dodatkowy obiekt i stosownie do tego wyznaczyć granicę efektywności. Jest zrozumiałe, że granica efektywności niekoniecznie w całości musi być identyczna z izokwantą dla postulowanej technologii.

2. Granica efektywności GE_W może być rozumiana jako kres dolny *obszaru efektywności* w przestrzeni wydajności czynników. Wtedy wszystkie technologie leżące nad granicą miałyby – w zależności od konwencji – efektywność równą 1 (lub większą od 1). W takim wypadku *„rozszerzoną” granicą efektywności* jest łamana GE_W, rozszerzona o odpowiednie fragmenty osi współrzędnych. Na przykład na rysunku 3 rozszerzona granica efektywności początkowo biegnie od góry po osi W_2, do punktu A, następnie łamaną $ABCD$ i potem, od punktu D, wzdłuż osi W_1.

6. Promień technologiczny

Promieniem technologicznym w przestrzeni nakładów nazwiemy – wychodzącą z początku układu współrzędnych – półprostą odpowiadającą analizowanej (np. założonej czy też empirycznej) proporcji między *nakładami czynników*.

Jeśli na przykład przyjmuje się, że technologia „powinna” być taka, aby nakłady czynnika pierwszego do nakładów czynnika drugiego miały się tak jak p_1 do p_2, to promień technologiczny określony jest jako proporcja

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{p_1}{p_2}, \tag{15}$$

czyli jako równanie

$$p_2 X_1 - p_1 X_2 = 0. \tag{16}$$

Zauważmy, że z uwagi na równość $X_r = Y/W_r$ powyższej proporcji między nakładami odpowiada następująca proporcja między wydajnościami czynników:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{q_1}{q_2}, \tag{17}$$

gdzie:

$$q_1 = \frac{1}{p_1}, \tag{18}$$

$$q_2 = \frac{1}{p_2}.$$

Promieniem technologicznym w przestrzeni wydajności jest równanie

$$p_1 W_1 - p_2 W_2 = 0 \tag{19}$$

lub równanie

$$q_2 W_1 - q_1 W_2 = 0, \tag{20}$$

odpowiadające założonej proporcji q_1/q_2 między wydajnościami czynników lub – co na to samo wychodzi – odpowiadające założonej proporcji p_1/p_2 między nakładami czynników.

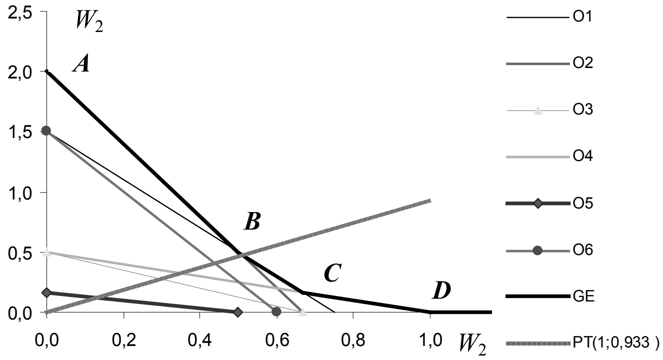
Promień technologiczny w przestrzeni wydajności może być założony lub może wynikać z danych empirycznych. Jeśli na przykład uważa się, że technologia powinna być taka, aby na trzy jednostki nakładu pierwszego przypadały cztery jednostki nakładu drugiego, to $p_1 = 3$, $p_2 = 4$ i promień technologiczny w przestrzeni wydajności określa równanie $3\ W_1 - 4\ W_2 = 0$.

Dalej – o ile nie zaznaczymy inaczej – mówimy o promieniu technologicznym w przestrzeni wydajności. Kodujemy go przez $PT(q_1, q_2)$ lub przez $PT(p_2, p_1)$[14].

Przykład

Łączne nakłady dla sześciu obiektów wynoszą $X_1 = 28$, $X_2 = 33$. *Wynika z tego, że średnia relacja nakładów* $X_1/X_2 = p_1/p_2 = 28/30 = 0{,}933/1$. *Dlatego też „średni” promień technologiczny w przestrzeni wydajności to* $PT(1;0{,}933)$. *Określa go równanie* $0{,}933\ W_1 - 1{,}0\ W_2 = 0$. *Ów promień technologiczny oznacza, że wydajność czynnika drugiego stanowi* 93,3% *wydajności czynnika pierwszego* (*oraz że na jednostkę nakładu pierwszego przypada* 1,14 *jednostek nakładu drugiego*).

Na rysunku 4 pokazano promień technologiczny $PT(1;0{,}933)$ *na tle granicy efektywności GE oraz jednostkowych izokwant* ICE_W.



Rys. 4. Granica efektywności i promień technologiczny
Źródło: Opracowanie własne.

---

[14] Proporcja wydajności czynnika pierwszego do wydajności czynnika drugiego ma się tak, jak $q_1{:}q_2$, co jest odwrotnością proporcji między nakładami.

7. Ustalanie efektywności obiektów

Skoro określono granicę efektywności (czyli zbiór kombinacji wydajności obu czynników, dla których efektywność wynosi 1), to oczywistym miernikiem efektywności dowolnego obiektu jest *odległość* jego jednostkowej izokwanty I od granicy efektywności. Problemem jest ustalenie owej odległości. Podamy trzy propozycje.

[Wariant I] Odległość wzdłuż promienia wzorcowego

Niech PT będzie pewnym wzorcowym promieniem technologicznym w przestrzeni wydajności, czyli pewną relacją między wydajnościami czynników, wynikającą np. z „wzorcowej" relacji między nakładami technologii. Taka wzorcowa relacja, w zależności od kontekstu badania efektywności, to relacja docelowa, relacja średnia, najlepsza relacja empiryczna itp. Oparcie badań na wzorcowej technologii można tłumaczyć potrzebą ustalenia jednolitego punktu odniesienia dla wszystkich obiektów.

Miernikiem odległości izokwanty od granicy efektywności może być długość odcinka promienia technologicznego od punktu przecięcia promienia z izokwantą do punktu przecięcia promienia z granicą efektywności. Jest to odległość ze względu na dany promień technologiczny. Odległość izokwanty od granicy efektywności można uznać za swego rodzaju lukę efektywności danego obiektu.

Miernikiem efektywności obiektu j-ego ($1 \leq j \leq J$) jest

$$E_j = \frac{d_j}{d_{GE}}, \tag{21}$$

gdzie:

d_j – długość odcinka promienia technologicznego między początkiem układu współrzędnych a punktem przecięcia promienia z izokwantą jednostkową I_j,

d_{GE} – długość promienia od początku układu współrzędnych do punktu przecięcia promienia z granicą efektywności GE.

Po oznaczeniu współrzędnych punktu przecięcia promienia technologicznego z izokwantą przez (i_1, i_2) otrzymujemy

$$d_j = \sqrt{i_1^2 + i_2^2}\,. \tag{22}$$

Niech x_{1j}, x_{2j} będą nakładami czynnika X_1, X_2 w obiekcie j-tym. Punkt $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2)$ jest rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x_{1j} W_1 + x_{2j} W_2 = 1 & \text{(izokwanta } I_j\text{)}, \\ q_2 W_1 - q_1 W_2 = 0 & \text{(promień } PT\text{)} \end{cases} \tag{23}$$

względem W_1 oraz W_2 (przy danych nakładach x_{1j}, x_{2j} oraz danych współczynnikach proporcji q_1, q_2 między wydajnością czynników[15]).

Oznaczmy przez e_1, e_2 współczynniki kierunkowe tego odcinka granicy efektywności, który przecinany jest przez promień technologiczny (są to współczynniki kierunkowe odpowiedniej izokwanty *ICE*). Niech jeszcze (g_1, g_2) będzie punktem przecięcia promienia technologicznego z granicą efektywności. Wówczas

$$d_{GE} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}\,. \tag{24}$$

Punkt $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$ jest rozwiązaniem układu równań:

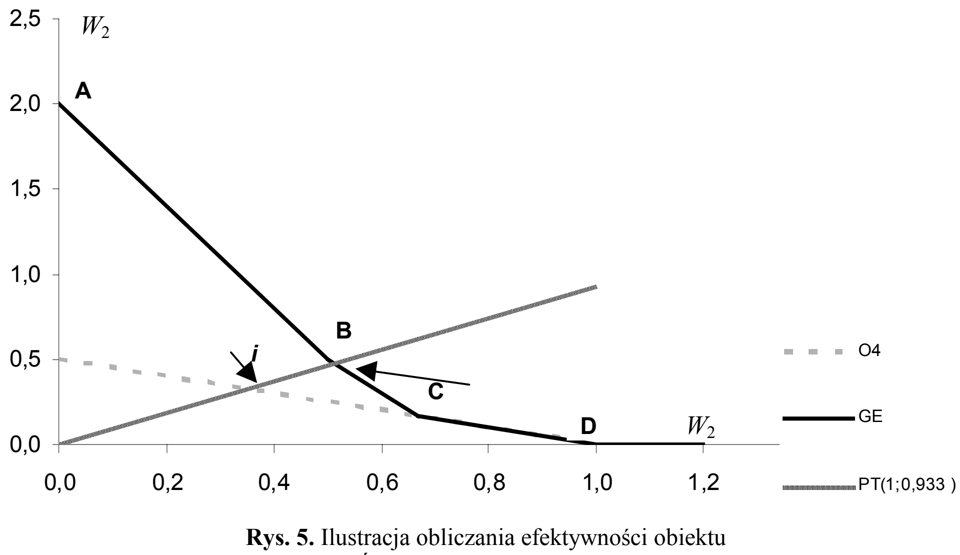
$$\begin{cases} e_1 W_1 + e_2 W_2 = 1 & \text{(granica efektywności } GE) \\ q_2 W_1 - q_1 W_2 = 0 & \text{(promień } PT). \end{cases} \tag{25}$$

względem W_1 oraz W_2 (przy danych współczynnikach e_1, e_2 oraz danych współczynnikach q_1, q_2 promienia technologicznego).

Układ równań (25) jest ten sam dla wszystkich obiektów (bo stały jest promień technologiczny). Przy przejściu od obiektu do obiektu zmienia się natomiast (zwykle) pierwsze równanie układu (23).

Przykład

Na rysunku 5 zilustrowano obliczanie efektywności obiektu O4 przy „średnim" promieniu efektywności PT(1;0,933).



Rys. 5. Ilustracja obliczania efektywności obiektu
Źródło: Obliczenia własne.

[15] Przypomnimy, że proporcja ta oznacza proporcję między nakładami równą q_2/q_1.

• *Punkt przecięcia izokwanty* I_4 *z promieniem PT*(1; 0,933) *znajdujemy jako rozwiązanie układu równań*:

$$\begin{cases} 1{,}0\,W_1 + 2{,}0\,W_2 = 1 & (\text{izokwanta } I_4) \\ 0{,}933\,W_1 - 1{,}0\,W_2 = 0, & (\text{promień } PT) \end{cases}.$$

Jest to $\boldsymbol{i}$ = (0,349, 0,326) *i dlatego* d_4 = 0,477.

• *Punkt przecięcia promienia PT*(1; 0,933) *z granicą efektywności, którą w tym wypadku jest odcinek AB, czyli odcinek izokwanty* I_2, *wyznaczymy z układu równań*:

$$\begin{cases} 1{,}5\,W_1 + 0{,}5\,W_2 = 1 & (\text{granica efektywności} = \text{odcinek izokwanty } I_2) \\ 0{,}933\,W_1 - 1{,}0\,W_2 = 0, & (\text{promień } PT). \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest punkt **g** = (0,511; 0,477). *Stąd* d_{GE} = 0,700. *Efektywność obiektu O4 przy średnim" promieniu technologicznym wynosi* E_4 = 0,477/ 0,700 = 68,2%.

W tabeli 4 podano, obliczone w analogiczny sposób, efektywności wszystkich obiektów. Wynikają one z mierzonej po „średnim" promieniu technologicznym PT(1;0,933) *odległości między jednostkową izokwantą efektu dla danego obiektu a granicą efektywności.*

Tabela 4. Efektywność obiektów względem „średniego" promienia technologicznego

Nr obiektu j	Odległość d_j	Efektywność E_j
1	0,6995	1,000
2	0,6955	0,994
3	0,4063	0,581
4	0,4772	0,682
5	0,1800	0,257
6	0,5976	0,854

Źródło: Obliczenia własne.

W pełni efektywny jest tylko obiekt O1, a obiekt O2 jest prawie całkowicie efektywny. Najmniejszą efektywnością, i to zaledwie 26%, charakteryzuje się obiekt piąty. Dodajmy, że w metodzie DEA (*wariant CCR ukierunkowany na nakłady – zob. końcową część punktu* 2) *za w pełni efektywne obiekty uznaje się O1, O2, O4 i nawet O5, który – według proponowanego miernika opartego na badaniu izokwant wydajności – jest zdecydowanie najgorszy!*

Uwaga

W szczególnym przypadku promień technologiczny może być *zdegenerowany* – mianowicie może być półprostą W_1 = 0 lub półprostą W_2 = 0 (czyli osiami współrzędnych w dodatniej ćwiartce układu). Jeśli W_r = 0, efektywność jest badana z punktu widzenia *granicznej* wydajności czynnika numer r, tzn. wydajności liczonej przy założeniu, że nakłady drugiego, a w ślad za tym jego wydajność, są zerowe. Stosowana niekiedy ocena efektywności na podstawie ilorazu „*statystycznej*" wydajności czynnika, czyli ilorazu *cały wynik/nakład pojedynczego czynnika* to po prostu ocena według zdegenerowanego promienia technologicznego.

Przykładowo, ranking obiektów według granicznej wydajności drugiego czynnika, a więc według miejsc przecięcia izokwant cząstkowych efektów z osią W_1 jest następujący (zob. rys. 1): O2, O1, O6, O3, O4, O5.

[Wariant II] Odległość wzdłuż własnego promienia technologicznego

W realnych zadaniach, dotyczących praktyki gospodarczej (np. restrukturyzacji obiektów), ocena według promienia „wzorcowego" oznacza, że osoba oceniająca uznaje za możliwe przeprowadzenie – nawet radykalnej – zmiany technologii w danym obiekcie, o ile dotychczasowa odbiega od wybranej. Nie zawsze jest to możliwe.

Dlatego można proponować, by efektywność obiektu oceniana była w sensie jego własnej technologii, a nie według technologii wzorcowej[16]. Z formalnego punktu widzenia obliczenia w odniesieniu do danego obiektu przebiegają tak jak poprzednio. Zmienia się tylko promień technologiczny – z wzorcowego, na własny.

Własny promień technologiczny dla obiektu j-tego to równanie realizujące tę samą proporcję nakładów czynników, jaką zaobserwowano w tym obiekcie, czyli proporcję

$$\frac{p_{1j}}{p_{2j}} = \frac{x_{1j}}{x_{2j}}. \tag{26}$$

Własny promień technologiczny PT_j w przestrzeni wydajności czynników określony jest równaniem:

$$PT_j = p_{1j}\,W_1 - p_{2j}W_2 \quad \text{(por. (16))} \tag{27}$$

gdzie:

$$p_{1j} = k\,x_{1j}, \tag{28}$$

$$p_{2j} = k\,x_{2j}$$

k – wybrana dowolna liczba większa od 0[17].

[16] A wnioski wynikające z tej oceny, np. o konieczności zmiany technologii i restrukturyzacji, będą dopiero formułowane na tle wyników badania efektywności dotychczasowej.

[17] Na przykład w przypadku obiektu pierwszego, dla którego nakład czynnika pierwszego wynosi 4, a nakład drugiego 2, własny promień technologiczny PT_1: $(k \cdot 4)W_1 - (k \cdot 2)W_1 = 0$; na przykład: PT_1: $2W_1 - W_2 = 0$ lub $W_1 - 0{,}5W_2 = 0$.

W celu ustalenia punktu przecięcia jednostkowej izokwanty obiektu j ($j = 1, \ldots, J$), z jego własnym promieniem technologicznym, rozwiązywany jest układ równań:

$$x_{1j} W_1 + x_{2j} W_2 = 1 \quad \text{(izokwanta } I_j\text{)} \tag{29}$$

$$p_{1j} W_1 - p_{2j} W_2 = 0, \quad \text{(promień } PT_j\text{)}$$

względem W_1 oraz W_2.

Dla ustalenia punktu przecięcia granicy efektywności z własnym promieniem efektywności trzeba rozwiązać układ równań:

$$e_1 W_1 + e_2 W_2 = 1 \quad (\textit{granica efektywności GE}) \tag{30}$$

$$p_{1j} W_1 - p_{2j} W_2 = 0, \quad (\textit{promień } PT_j)$$

względem W_1 oraz W_2. Jak poprzednio, mówiąc o granicy efektywności mamy na myśli ten odcinek łamanej *GE*, który przecinany jest przez promień technologiczny.

Efektywność obiektu numer j obliczymy według wzorów (21), (22), (24) z tym, że promień *PT* oznacza teraz „własny" promień technologiczny obiektu j-tego.

Przykład

W tabeli 5 przedstawiono wyniki obliczeń dla danych z tabeli 3, jeśli odległość obiektu od granicy efektywności mierzona jest po własnym promieniu technologicznym tego obiektu. Obok podano wskaźniki efektywności obliczone przy „średnim" promieniu technologicznym PT(1, 0,933) – *por. tabela 4.*

Tabela 5. Efektywność wg własnego promienia i efektywność wg promienia średniego

Obiekt	**Własny *PT***	Efektywność	**Średni *PT***	Efektywność
O1	*PT(1;2)*	0,938	*PT(1, 0,933)*	1,000
O2	*PT(1;3)*	1,000	*PT(1, 0,933)*	0,994
O3	*PT(1;0,75)*	0,611	*PT(1, 0,933)*	0,581
O4	*PT(1;0,5)*	0,833	*PT(1, 0,933)*	0,682
O5	*PT(1;0,33)*	0,389	*PT(1, 0,933)*	0,257
O6	*PT(1;2,5)*	0,825	*PT(1, 0,933)*	0,854

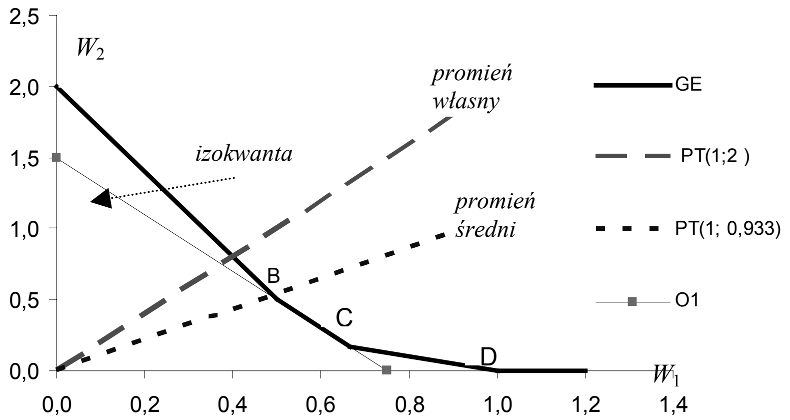
Źródło: Obliczenia własne.

1. Tylko jeden obiekt, stosując własną technologię jest w pełni efektywny. Jest to obiekt O2. Pozostałe obiekty stosując swoje technologie uzyskują mniejszy wynik, niż byłoby to możliwe przy obserwowanych w tych obiektach nakładach czynników. Prawie efektywna w obiekcie O1 jest stosowana przezeń technologia. W pozostałych obiektach efektywność własnych technologii jest wyraźnie mniejsza od 90%. Szczególnie dotyczy to obiektu O5.

2. Przypomnijmy, że w metodzie DEA, która też w pewnym sensie porównuje własną technologię obiektu z technologiami innych obiektów, dla tego samego przykładu liczbowego, otrzymano aż cztery obiekty o 100% efektywności: O1, O2, O4 i, nawet najgorszy obecnie, obiekt O5.

3. Na ogół jest tak jak można było się spodziewać: Efektywność mierzona według własnego promienia technologicznego jest wyższa od mierzonej po jakimś innym promieniu (np. średnim).

4. Niekiedy jednak efektywność relatywizowana względem własnego promienia technologicznego jest niższa niż względem innego promienia. Pokazuje to przykład obiektu O1, co zilustrowano na rysunku 6.

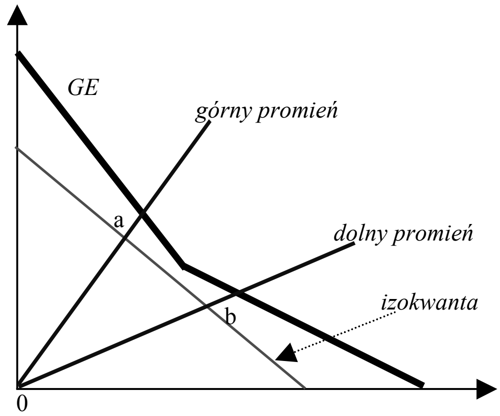


Rys. 6. Ilustracja przypadku niższej efektywności według własnego promienia technologicznego
Źródło: Opracowanie własne.

Mierzona na promieniu „średnim” PT(1; 0,933) *odległość między izokwantą dla tego obiektu a granicą efektywności wynosi zero. Natomiast odległość między tą izokwantąa granicą GE mierzona po własnym promieniu PT*(1;2) *obiektu drugiego, jest dodatnia.*

[Wariant III] Średnia odległość w stożku promieni technologicznych

Inny wariant obliczeń wskaźników efektywności mógłby wychodzić ze spostrzeżenia, że wprawdzie radykalna zmiana promienia technologicznego w danym obiekcie nie jest możliwa, jednak zmiana w jakimś niewielkim zakresie (np. o 10–20% w górę lub w dół) od własnego promienia technologicznego może być zrealizowana. Mielibyśmy wtedy do czynienia ze *stożkiem* (wiązką) promieni technologicznych dla danego obiektu. Zilustrowano to na rysunku 7.



Rys. 7. Stożek promieni technologicznych
Źródło: Opracowanie własne.

Wówczas miernikiem efektywności mógłby być iloraz pola trójkąta *0ab* ogra+niczanego przez ramiona (*dolny promień, górny promień*) stożka oraz izokwantę, do pola ograniczonego granicą efektywności i ramionami stożka leżącymi pod tą granicą.

Bibliografia

[1] CHARNES A., COOPER W.W., RHODES E., *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operational Research 2, 1978.

[2] DOMAGAŁA A., *Postulat homogeniczności jednostek decyzyjnych w metodzie DEA. Sugestie teoretyczne a wyniki symulacji empirycznych* [w:] Ekonometria finansowa, Zeszyty Naukowe AE w Poznaniu, Wyd. Akademii Ekonomicznej, Poznań 2006 (w druku).

[3] GOSPODAROWICZ M., *Procedury analizy i oceny banków*, Materiały i Studia, NBP, zeszyt 103, Warszawa 2000.

[4] KOPCZEWSKI T., *Efektywność technologiczna i kosztowa banków komercyjnych w Polsce w latach 1997–2000*, cz. I, Materiały i Studia, NBP, zeszyt 113, Warszawa 2000.

[5] PAWŁOWSKA M., *Konkurencja i efektywność na polskim rynku bankowym na tle zmian strukturalnych i technologicznych*, Materiały i Studia, NBP, zeszyt 192, Warszawa 2005.

[6] PRĘDKI A., *Stałe i zmienne czynniki produkcji w badaniu efektywności kosztowej za pomocą metody DEA*, Przegląd Statystyczny, 2002, z. 3, Warszawa 2002.

[7] PRĘDKI A., *Wykorzystanie dualnych programów liniowych w badaniu efektywności jednostek produkcyjnych metodą DEA*, Przegląd Statystyczny, 2005, z. 2, Warszawa 2005.

[8] ROGOWSKI G. , *Metody analizy i oceny działalności banku na potrzeby zarządzania strategicznego*, Wydawnictwo WSB w Poznaniu, Poznań 1999.

Estimating the economic entities efficiency on the basis of partial efficiency isoquants

The author of the article describes a method for estimating the efficiency of economic entities that produce one output using more than one input. The method consists in constructing isoquants for each object in the space of productivity of inputs. For a given object quantities of inputs are the isoquant parameters and partial productivities of inputs are the arguments.

Further analysis consists in defining efficiency limit which is such an edge that all the isoquants are dominated by it. The efficiency of a given object is estimated on the basis of the distance between the isoquant and the efficiency limit calculated along the assumed technological radius. To make the considerations easier the author analysis three types of technological radius for a given object: (a) the radius settled *a priori* (which means that all the objects are examined under the same external criterion), (b) the *individual* radius (which is similar to Data Envelopment Analysis), and (c) the *cone-shaped* radius.

Keywords: *isoquant, efficiency, isoquant in the productivity space, efficiency frontier*