B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 3–4 2005

Michał ZAWISZA*

PARAMETRYCZNA DOMINACJA PROBABILISTYCZNA – MODEL WIELOKRYTERIALNY

Przedstawiono modyfikację definicji dominacji probabilistycznej. Wprowadzono maksymalny poziom prawdopodobieństwa, dla którego zachodzi relacja dominacji probabilistycznej między dwoma zmiennymi losowymi $\beta^{\max}$. Zdefiniowano parametryczną dominację stochastyczną PPD wykorzystując $\beta^{\max}$ oraz nowy parametr β^{*}, pozwalający na określenie siły dominacji. Następnie zaprezentowano wykorzystanie parametrycznej dominacji probabilistycznej PPD do rozwiązywania problemów wielokryterialnych.

Słowa kluczowe: *dominacja probabilistyczna, parametryczna dominacja stochastyczna, dominacja stochastyczna, analiza wielokryterialna*

W pracy przedstawiono wybrane elementy teorii dominacji stochastycznych i dominacji probabilistycznej oraz ich wykorzystanie w wielokryterialnych problemach wspomagania decyzji.

Zaprezentowano rozwinięcie definicji dominacji probabilistycznej oraz definicję i sposób wyznaczania parametrycznej dominacji probabilistycznej. Autor przedstawił także implementację zaproponowanej definicji na gruncie programowania wielokryterialnego, naświetlając korzyści płynące z wykorzystania nowego podejścia do określania preferencji decydenta.

Punktem wyjścia do nowego podejścia była metoda Martela i Zarasia, wykorzystująca do rozwiązywania problemów wielokryterialnych dominacje stochastyczne i probabilistyczne [6]. Wykorzystuje ona podejście szkoły amerykańskiej, której przedstawicielami są Keeney i Raiffa [3], twórcy wieloatrybutowej teorii użyteczności, oraz szkoły frankofońskiej wykorzystującej relację przewyższania, której najwybitniejszym przedstawicielem jest Roy [8]. Była ona rozwinięciem metody opartej wyłącznie na relacjach dominacji stochastycznych [4], [5], [6] i miała pomóc rozwiązywać sytuacje

* Miejski Ośrodek Pomocy Społecznej, ul. Jadwigi Markowej 20, 41-709 Ruda Śląska. mzawisza@plusnet.pl

decyzyjne, których nie rozstrzygają relacje dominacji stochastycznych. Relacje te mają zastosowanie tylko dla pewnych klas funkcji użyteczności i nie zawsze mogą być wykorzystane do określania preferencji decydenta.

Niestety metoda wykorzystująca dominacje stochastyczne i probabilistyczne nadal pozostawiała wiele niewyjaśnionych relacji na etapie budowania globalnej relacji preferencji pomiędzy wszystkimi parami wariantów w problemie wielokryterialnym. W modelach wielokryterialnych, gdzie kryteria są przeciwstawne, ta sytuacja zdarza się bardzo często. Wykorzystanie zaproponowanej w opracowaniu metody, wykorzystującej parametryczną dominację probabilistyczną pozwala w wielu takich przypadkach na zbudowanie dokładniejszej globalnej relacji preferencji przez określenie większej liczby globalnych relacji częściowych pomiędzy poszczególnymi wariantami.

Pierwsza część opracowania jest poświęcona dominacji stochastycznej. W drugiej przedstawiono modyfikację definicji dominacji probabilistycznej – parametryczną dominację probabilistyczną. W trzeciej części autor omówił wykorzystanie nowej definicji w wielokryterialnym wspomaganiu decyzji, prezentując na przykładach zmodyfikowaną metodę analizy wielokryterialnej.

1. Dominacje stochastyczne

Dominację stochastyczną pierwszego stopnia FSD (*First Stochastic Dominance*) zdefiniowali J. P. Quirk i R. Saposnik w swojej pracy *Admissibility and Measurable Utility Functions* [7] w 1962 r. W 1969 roku J. Hadar i W.R. Russel przedstawili dominację stochastyczną drugiego stopnia SSD (*Second Stochastic Dominance*) [2]. W 1970 roku G.A. Whitemore zaproponował dominację stochastyczną trzeciego stopnia TSD (*Third Stochastic Dominance*) [10].

Niech zmienna losowa X będzie określona na przedziale $[a, b]$ i ma dystrybuantę F_i oraz zmienna losowa Y będzie określona na przedziale $[a, b]$ i ma dystrybuantę F_j, wówczas zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y i jest to **dominacja stochastyczna stopnia pierwszego**, gdy spełnione są następujące warunki [7]:

$$H_1(x) = F_i(x) - F_j(x) \le 0 \quad \text{dla każdego} \quad x \in [a, b] \text{ i } F_i \neq F_j, \tag{1}$$

co zapisujemy jako X FSD Y.

Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y i jest to **dominacja stochastyczna stopnia drugiego**, gdy spełnione są następujące warunki [2]:

$$H_2(x) = \int_a^x H_1(y)dy \le 0 \quad \text{dla każdego} \quad x \in [a, b] \text{ i } F_i \neq F_j, \tag{2}$$

co zapisujemy jako X SSD Y.

Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y i jest to **dominacja stochastyczna stopnia trzeciego**, gdy spełnione są następujące warunki [10]:

$$H_3(x) = \int_a^x H_2(y)dy \leq 0 \quad \text{dla każdego} \quad x \in [a, b] \text{ i } F_i \neq F_j, \tag{3}$$

oraz

$$E(X) \geq E(Y), \tag{4}$$

co zapisujemy jako X TSD Y.

Zdefiniowane dominacje stochastyczne są wykorzystywane do opisu zachowań decydenta, który ma awersję do ryzyka, charakteryzującego się wklęsłą funkcją użyteczności typu DARA.

Powyższe dominacje dają nam pewną informację o preferencjach takiego decydenta. Jeżeli zachodzi FSD, SSD lub TSD, to możemy stwierdzić, że dla decydenta X jest przynajmniej tak dobra jak Y. Mówimy wtedy, że zachodzi **jawna dominacja stochastyczna**.

Odwrotne dominacje stochastyczne SISD (*Second Inversed Stochastic Dominance*) oraz TISD1 (*Third Inversed Stochastic Dominance* 1) zostały zaproponowane przez M. J. Goovaertsa [1] w 1984 r., chociaż określenie „odwrotna”, dla tego szczególnego rodzaju dominacji, zaproponował po raz pierwszy, wraz z dominacją TISD2 (*Third Inversed Stochastic Dominance* 2) K. Zaraś dopiero w 1989 roku [12].

Niech zmienna losowa X będzie określona na przedziale $[a, b]$ i ma dystrybuantę F_i oraz zmienna losowa Y będzie określona na przedziale $[a, b]$ i ma dystrybuantę F_j. Wówczas zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y i jest to **odwrotna dominacja stochastyczna stopnia drugiego**, gdy spełnione są następujące warunki [1]:

$$\overline{H}_2(x) = \int_x^a \overline{H}_1(y)dy \geq 0 \quad \text{dla każdego} \quad x \in [a, b] \tag{5}$$

oraz

$$\overline{F}_i \neq \overline{F}_j,$$

gdzie $\overline{H}_1$ to różnica odwrotnych dystrybuant $\overline{F}_i$ i $\overline{F}_j$ [9]. Dystrybuanta i odwrotna dystrybuanta określone są następująco:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dF_i(x) = \int_a^b d\overline{F}_i(x) = 1, \tag{6}$$

a powyższą dominację zapisujemy jako X SISD Y.

Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y i jest to **odwrotna dominacja stochastyczna stopnia trzeciego pierwszego rodzaju**, gdy spełnione są następujące warunki:

$$\hat{H}_3(x) = \int_a^x \overline{H}_2(y)dy \geq 0 \quad \text{dla każdego} \quad x \in [a, b] \text{ oraz } \overline{F}_i \neq \overline{F}_j, \tag{7}$$

co zapisujemy jako X TISD1 Y.

Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y i jest to **odwrotna dominacja stochastyczna stopnia trzeciego drugiego rodzaju**, gdy spełnione są następujące warunki:

$$\overline{H}_3(x) = \int_x^a \overline{H}_2(y)dy \geq 0 \quad \text{dla każdego} \quad x \in [a, b] \text{ oraz } \overline{F}_i \neq \overline{F}_j, \tag{8}$$

co zapisujemy jako X TISD2 Y.

Zdefiniowane odwrotne dominacje stochastyczne charakteryzują decydenta ze skłonnością do ryzyka (wypukła funkcja użyteczności typu INARA). Jeżeli zachodzi SISD, TISD1 lub TISD2, to dla decydenta X jest przynajmniej tak dobra jak Y, czyli że zachodzi **jawna dominacja stochastyczna**.

W relacjach między zmiennymi losowymi mamy sytuacje jawne – kiedy zaobserwowana dominacja jest zgodna z preferencjami decydenta oraz niejawne, kiedy takiej zgodności nie ma.

Wszystkie możliwe sytuacje przedstawiono w tabeli 1, gdzie przedział $[a, b]$ jest dziedziną porównywanych zmiennych losowych. Sytuacje oznaczone gwiazdką * zaliczają się do jawnych dominacji stochastycznych. W sytuacjach oznaczonych w tabeli jako ? nie wiemy, czy prawdą jest stwierdzenie, że X jest przynajmniej tak dobra jak Y, więc jest to dominacja niejawna. Kategoria niejawnych dominacji stochastycznych obejmuje również wszystkie sytuacje, gdzie $a < 0 < b$. Te właśnie przypadki będą wymagały skonsultowania z decydentem.

Tabela 1

Sytuacje niejawne i niejawne

	$a < b < 0$ INARA	$0 < a < b$ DARA
X FSD Y	*	*
X SSD Y	?	*
X TSD Y	?	*
X SISD Y	*	?
X TISD1 Y	*	?
X TISD2 Y	*	?

Źródło: [4].

2. Dominacja probabilistyczna

Opisane sytuacje niejawne mogą zostać rozstrzygnięte przez dodanie do analizy dominacji probabilistycznej.

Zastosowanie relacji dominacji stochastycznych w analizie decyzji ma podstawy w teorii funkcji użyteczności. Często jednak nasze praktyczne zachowania w sytuacji ryzyka nie są zgodne z rozwiązaniami teoretycznymi. Teoretycznie rozwiązania mogą być odrzucane w praktyce [9]. Określimy dodatkową relację – dominację probabilistyczną, zdefiniowaną w 1982 r. przez C. Wrathera i P.L. Yu [11], którą włączymy do dalszych analiz.

Niech zmienna losowa X będzie określona na przedziale $[a, b]$ i ma dystrybuantę F_i oraz zmienna losowa Y będzie określona na przedziale $[a, b]$ i ma dystrybuantę F_j. Wówczas zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y w sensie **dominacji probabilistycznej**, gdy spełniony jest następujący warunek [11]:

$$P(X > Y) \geq \beta, \quad \text{gdzie} \quad \beta \in [0{,}5; 1], \tag{9}$$

co zapisujemy jako X PD Y lub $X \beta Y$.

$P(X > Y)$ jest prawdopodobieństwem takim, że wartość zmiennej X przewyższa wartości zmiennej Y, a β jest miarą tego zjawiska. Jeżeli β jest większe od 0,5, to intuicyjnie oznacza to, że X jest lepsze od Y w więcej niż 50% przypadków.

Dla dyskretnych zmiennych losowych możemy łatwo wyliczyć prawdopodobieństwo takiego zdarzenia, że wartości zmiennej X przewyższają wartości zmiennej Y.

Przykład 1

Niech zmienne losowe X i Y będą takie, że $P(X = 1) = 0{,}6$, $P(X = 3) = 0{,}4$ oraz $P(Y = 0) = 0{,}4$, $P(Y = 2) = 0{,}6$.

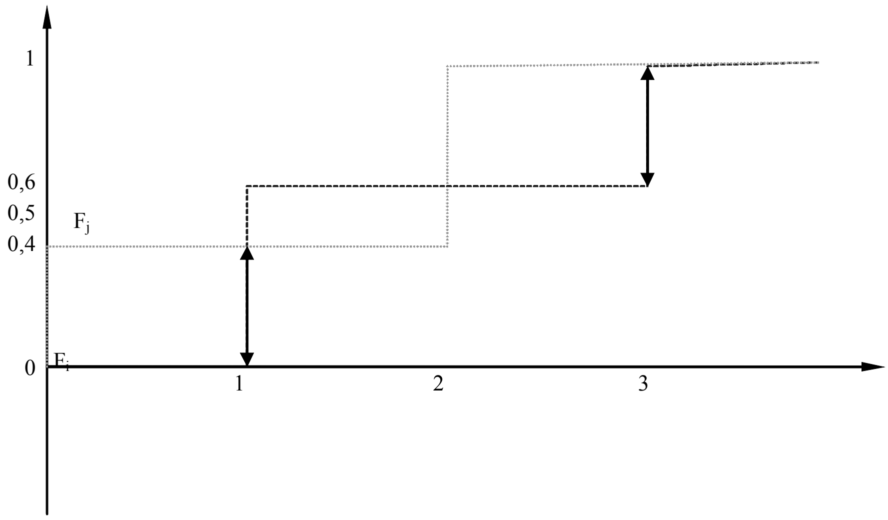
Dla dyskretnych zmiennych losowych wyznaczamy prawdopodobieństwo takich zdarzeń, że wartości zmiennej X przewyższają wartości zmiennej Y. W rozważanym przykładzie będą to $P(X = 3)$ oraz $P(X = 1 \mid Y = 0)$, zatem

$$P(X > Y) = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}64.$$

Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y z $\beta = 0{,}64$. Metodę możemy prześledzić, wykorzystując wartości dystrybuant porównywanych zmiennych losowych na rysunku.

Z definicji dominacji probabilistycznej wynika następująca własność tej relacji:

$$\text{jeżeli} \quad \beta_1 > \beta_2 \quad \text{i} \quad X \beta_1 Y, \quad \text{to} \quad X \beta_2 Y. \tag{10}$$



Rys. 1. Wyznaczanie współczynnika β
Ź r ó d ł o: opracowanie własne

Uwzględniając powyższą zależność, wprowadzimy nową wartość dla wyznaczania dominacji probabilistycznej $\beta^{\max}$ – maksymalny poziom prawdopodobieństwa, dla którego zachodzi relacja dominacji probabilistycznej pomiędzy dwoma zmiennymi losowymi. Jest to wielkość charakteryzująca parę zmiennych losowych, a jej wartość jest stała dla danej pary zmiennych.

Uogólniając powyższe rozumowanie, dla dyskretnych zmiennych losowych określonych na przedziale $[a, b]$ możemy zapisać, że

$$\beta^{\max} = \sum_i P(X = x_i) \cdot P(Y < x_i)\,. \tag{11}$$

Znając powyższe prawdopodobieństwo oraz wykorzystując wspomnianą własność dominacji probabilistycznej, przy założeniu, że $\beta^{\max} \geq 0{,}5$ możemy ustalić, że $X\ \beta\ Y$ dla wszystkich $\beta \in [0{,}5; \beta^{\max}]$.

2.1. Parametryczna dominacja stochastyczna

Do definicji dominacji probabilistycznej, omówionej w poprzednim punkcie, dołączymy dodatkowy parametr, określający oczekiwany przez decydenta poziom przewyższania pomiędzy porównywanymi zmiennymi losowymi. Parametrem tym będzie zdefiniowany poziom prawdopodobieństwa (11).

Przykładowo, decydenta nie satysfakcjonuje spełnienie warunku $P(X > Y) \geq 0{,}5$, czyli nie wystarczy, aby X było lepsze od Y w więcej niż 50% przypadków. Żądamy, aby X było lepsze od Y w co najmniej 75% przypadków, wtedy $\beta \in [0{,}75; 1]$.

Wprowadźmy nowy **parametr** $\boldsymbol{\beta^*}$, który opisuje takie sytuacje. Określamy zatem dodatkowo prawdopodobieństwo wymagane przez decydenta. Zdefiniujemy za pomocą β^* dominację probabilistyczną – **parametryczną dominację probabilistyczną PPD**.

Niech zmienna losowa X będzie określona na przedziale $[a, b]$ i ma dystrybuantę F_i oraz zmienna losowa Y będzie określona na przedziale $[a, b]$ i ma dystrybuantę F_j: wówczas zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y w sensie parametrycznej dominacji probabilistycznej na poziomie β^*, gdy spełnione są następujące warunki:

$$P(X > Y) \geq \beta, \tag{12}$$

gdzie

$$\beta \in [\beta^*; 1] \text{ oraz } \beta^* \in [0{,}5; 1],$$

co zapiszemy jako $X\beta^*Y$ lub X PPD Y.

Wykorzystując wartość określoną wcześniej $\beta^{\max}$, określamy dominację probabilistyczną następująco:

$$\boldsymbol{X}\beta^*\boldsymbol{Y}, \text{ jeżeli } \beta^* > \beta^{\max}. \tag{13}$$

Dla danych jak w przykładzie 1 możemy napisać, że pomiędzy zmiennymi losowymi X i Y zachodzi relacja parametrycznej dominacji probabilistycznej wielkości parametru $\beta^* \in [0{,}5; 0{,}64]$.

3. Analiza wielokryterialna

W tej części opracowania zaprezentowano wykorzystanie parametrycznej dominacji probabilistycznej PPD do rozwiązywania problemów wielokryterialnych. Wyjściowym podejściem do zadania wielokryterialnego będzie model, w którym oprócz dominacji stochastycznych do analizy i opisu niewyraźnych preferencji włączona została dominacja probabilistyczna. Będziemy rozpatrywać zadanie wielokryterialne, przedstawione przez model A, X, E (Warianty Decyzji, Kryteria, Oceny) [4].

Rozpatrujemy:

1) skończony zbiór wariantów decyzji $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$,

2) zbiór kryteriów $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, które są probabilistycznie niezależne i spełniają również warunki niezależności, pozwalające na zastosowanie addytywnej funkcji użyteczności,

3) zbiór ocen wariantów decyzyjnych, względem kryteriów w postaci rozkładów $E = \{X_{ij}\}_{\mathrm{mxn}}$, gdzie X_{ij} jest zmienną losową z funkcją rozkładu prawdopodobieństwa $f_{ij}(x)$. Przedział zmienności zmiennych losowych związany z kryterium x_i przedstawimy jako $[x_{ia}, x_{ib}]$, gdzie x_{ia} to najgorsza wartość kryterium x_i, a x_{ib} – najlepsza wartość.

Wartość każdej oceny w odniesieniu do każdego kryterium jest przedstawiona za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa.

Tabela 2

Model (A, X, E) problemu wielokryterialnego

Kryteria / Warianty	x_1	x_2	... x_j ...	... x_n
a_1	$f_1(x_{11})$	$f_1(x_{12})$	$f_1(x_{1j})$	$f_1(x_{1n})$
a_2	$f_2(x_{21})$	$f_2(x_{22})$	$f_2(x_{2j})$	$f_2(x_{2n})$
...	...	...	...	...
a_m	$f_m(x_{m1})$	$f_m(x_{m2})$	$f_m(x_{mj})$	$f_m(x_{mn})$

Źródło: Martel J.M., Zaraś K. (1994).

Dokonujemy wyboru między dwoma wariantami a_i i a_i', ze względu na kryterium x_i z przedziału domkniętego $[a, b]$ w sytuacji ryzyka, gdzie:

$a = \min\ [\min\{x_{ij}\}, \min\{x_{ij}'\}]$,

$b = \max\ [\max\{x_{ij}\}, \max\{x_{ij}'\}]$,

$x_{ij} \in X_{ij},\ x_{ij}' \in X_{ij}'$.

Kryteria są ilościowe, a ich rozkłady prawdopodobieństwa są znane. Porównanie dwóch wariantów $a_i, a_i' \in \mathbf{A}$ prowadzi do porównania dwóch wektorów rozkładów. Z jednej strony, biorąc pod uwagę hipotezę niezależności, zgadzamy się, że to wielokryterialne porównanie może być zdekomponowane na n jednokryterialnych porównań. Z drugiej strony, ponieważ porównania te będą dokonywane za pomocą dominacji stochastycznych, będą one postaci „a_i jest przynajmniej tak dobra jak a_i'" w odniesieniu do każdego kryterium i dla wszystkich par $(a_i, a_i') \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$.

Porównując dwa rozkłady prawdopodobieństwa, możemy mieć różne sytuacje decyzyjne, nawet przy ustalonej relacji dominacji stochastycznej i dominacji probabilistycznej pomiędzy rozkładami X i Y. Inaczej będziemy odczytywać preferencje, jeżeli X FSD Y, gdy $P(X > Y) = 0{,}9$, a inaczej gdy $P(X > Y) = 0{,}1$. Dla podkreślenia różnicy między takimi sytuacjami oraz ich opisu Martel i Zaraś zaproponowali zasadę **prekryterium**, które rozróżnia silną preferencję **P** i słabą preferencję **Q** w następujący sposób [6]:

1. X **P** Y, jeżeli istnieje x^{α} takie, że $P(X < x^{\alpha}) > \beta/(1-\alpha)$ i $\neg\ Y$ SD X,

$$\text{gdzie } \beta \in [0{,}5;\ 1{,}0],\ \alpha \in [0;\ 1{,}0) \text{ i } x^{\alpha} = \sup\{x / P(X < x) \le \alpha\}. \qquad (14)$$

2. X **Q** Y, jeżeli istnieje x^{α} takie, że

$$P(X < x^{\alpha}) \leq \beta/(1 - \alpha) \text{ i } X \text{ SD } Y. \tag{15}$$

3. X ($\mathbf{R} \cup \mathbf{I}$) Y dla wszystkich pozostałych sytuacji. (16)

Jeżeli dominacje są przeciwstawne, ważniejsza jest relacja dominacji stochastycznej i taką relację klasyfikujemy jako słabą.

Przedstawione prekryterium pozwala na wykorzystanie łącznie relacji dominacji stochastycznych i probabilistycznych.

Korzystając z zaproponowanej w opracowaniu definicji $\beta^{\max}$ określającego maksymalny poziom przewyższania między porównywanymi zmiennymi losowymi, możemy relacje silnej (**P**) i słabej (**Q**) preferencji zapisać w następujący sposób:

1. X **P** Y, jeżeli X PD Y $0{,}5 < \beta^{\max}$ i $\neg$ Y SD X. (17)

2. X **Q** Y, jeżeli $\beta^{\max} \leq 0{,}5$ i X SD Y. (18)

Kolejnym krokiem analizy będzie przejście do porównań wektorów zmiennych losowych. Proponowana metoda polega na wyznaczeniu preferencji między wariantami decyzji osobno dla każdego kryterium i zbudowaniu globalnej relacji preferencji. W tym celu należy wyznaczyć dominacje stochastyczne oraz probabilistyczne przy ustalonym parametrze β. Następnie wyznaczamy preferencje pomiędzy wszystkimi wariantami dla wszystkich kryteriów. Aby zbudować globalną relację preferencji pomiędzy wszystkimi parami wariantów w problemie wielokryterialnym pozostaniemy przy regule zaproponowanej przez Martela i Zarasia [6]. Każdemu kryterium przypisujemy wagę w_k w taki sposób, że $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$, wtedy:

1. $a_i > a_j$, jeżeli $\neg$ a_{jk} $\mathbf{P}_k$ a_{ik} dla wszystkich k (weto) i jeżeli $w_{P+} + w_{Q+} \geq w_{Q-}$, (19)

2. $a_i \sim a_j$ dla pozostałych przypadków, (20)

gdzie dwie binarne relacje > oraz ~ to odpowiednio preferencja i brak preferencji oraz

w_{P+} jest sumą wag dla wszystkich k, dla których a_{ik} $\mathbf{P}_k$ a_{jk},

w_{Q+} jest sumą wag dla wszystkich k, dla których a_{ik} $\mathbf{Q}_k$ a_{jk},

w_{Q-} jest sumą wag dla wszystkich k, dla których a_{jk} $\mathbf{Q}_k$ a_{ik}.

Aby wariant decyzyjny a_i dominował a_j, dla żadnego kryterium nie może występować prekryterium silnej preferencji **P** takie że a_{jk}, **P** a_{ik}. Sytuacja taka została przez autorów określona jako weto.

Zilustrujemy omawianą nową propozycję modelu wielokryterialnego posługując się dwoma przykładami (2 i 3), gdzie $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ oraz $E = \{X_{ij}\}_{4\times3}$.

Przykład 2

Rozpatrzmy następujący model decyzyjny: znamy oceny czterech wariantów: a_1, a_2, a_3, i a_4 względem trzech kryteriów. Wagi w modelu są następujące: $w_1 = 0,5$, $w_2 = 0,25$, $w_3 = 0,25$. Rozkłady wszystkich zmiennych względem każdego kryterium zaprezentowano w tabelach 3–5.

Tabela 3

Kryterium nr 1

a_1	p_i	a_2	p_i	a_3	p_i	a_4	p_i
1	1,00	1	0,00	1	0,50	1	0,20
2	0,00	2	1,00	2	0,50	2	0,80

Źródło: dane umowne.

Tabela 4

Kryterium nr 2

a_1	p_i	a_2	p_i	a_3	p_i	a_4	p_i
1	0,60	1	0,50	1	0,40	1	0,30
2	0,40	2	0,50	2	0,60	2	0,70

Źródło: dane umowne.

Tabela 5

Kryterium nr 3

a_1	p_i	a_2	p_i	a_3	p_i	a_4	p_i
1	1,00	1	0,10	1	0,20	1	0,90
2	0,00	2	0,90	2	0,80	2	0,10

Źródło: dane umowne.

Dla określenia słabej i silnej preferencji między wariantami wyznaczono dominacje stochastyczne (tabela 6) oraz wartości współczynników $\beta^{\max}$ (tabela 7).

Tabela 6

Dominacje stochastyczne

Kryterium nr 1	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	FSD		FSD	FSD
a_3	FSD			
a_4	FSD		FSD	
Kryterium nr 2	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	FSD			
a_3	FSD	FSD		
a_4	FSD	FSD	FSD	
Kryterium nr 3	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	FSD		FSD	FSD
a_3	FSD			FSD
a_4	FSD			

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Tabela 7

Prawdopodobieństwo $\beta^{\max}$

Kryterium nr 1	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	1,00		0,50	0,20
a_3	0,50			
a_4	0,80		0,40	
Kryterium nr 2	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	0,30			
a_3	0,36	0,30		
a_4	0,42	0,35	0,28	
Kryterium nr 3	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	0,90		0,18	0,81
a_3	0,80			0,72
a_4	0,10			

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Następnie, zgodnie z definicjami (17) i (18), wyznaczane są prekryteria dla każdej pary wariantów względem wszystkich kryteriów (tabela 8), w ostatnim kroku wyznaczamy globalną relację preferencji (tabela 9).

Tabela 8

Prekryteria

Kryterium nr 1	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	P		Q	Q
a_3	Q			
a_4	P		Q	
Kryterium nr 2	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	Q			
a_3	Q	Q		
a_4	Q	Q	Q	
Kryterium nr 3	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	P		Q	P
a_3	P			P
a_4	Q			

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Tabela 9

Relacje preferencji pomiędzy różnymi wariantami

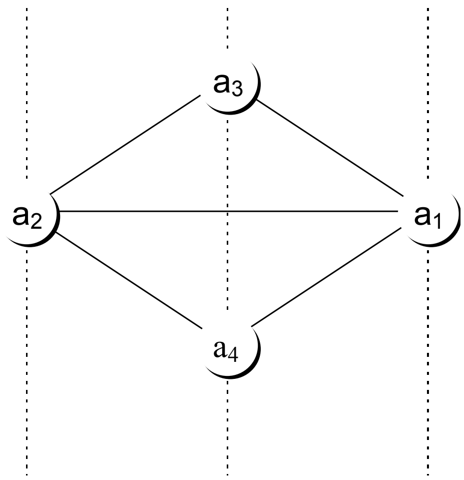
Preferencje	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1		~ 0	~ 0	~ 0
a_2	> 1		> 0,75	> 0,75
a_3	> 1	~ 0,25		~ 0,25
a_4	> 1	~ 0,25	~ 0,75	

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Relacje preferencji z tabeli 9 zostały wyznaczone zgodnie z definicjami (19) i (20). Wartości liczbowe w tabeli przedstawiają sumę wag $w_{P+} + w_{Q+}$.

Pomimo faktu, iż dla relacji pomiędzy a_4 i a_3 suma wag $w_{P+} + w_{Q+}$ jest równa 0,75, relacja ta nie została uwzględniona przy wyznaczaniu preferencji globalnej, ponieważ zadziałało tutaj prawo weta – w relacji pomiędzy a_4 i a_3 wariant a_3 jest silnie dominowany w stosunku do wariantu a_4 względem trzeciego kryterium.

Globalną relację preferencji dla przykładu możemy przedstawić za pomocą grafu (rysunek 2). Węzły grafu reprezentują warianty, natomiast łuki reprezentują zaobserwowane preferencje. Węzły grafu na rysunku są rozmieszczone na trzech poziomach. Warianty reprezentowane przez węzły na poziomach z lewej strony dominują warianty reprezentowane przez węzły na poziomach z prawej strony. Najbardziej na lewo mamy wariant a_2 co oznacza, że jest to wariant niezdominowany. Na drugim poziomie znajdują się dwa warianty a_3 i a_4. Warianty te są zdominowane przez a_2, ale dominuje wariant a_1, brak jest natomiast relacji pomiędzy a_3 i a_4.



Rys. 2. Globalna relacja preferencji
Ź r ó d ł o: opracowanie własne

W opisanej metodzie duży wpływ na liczbę preferencji może mieć sytuacja weta (19). Przypomnijmy, że aby wariant decyzyjny a dominował a', dla żadnego kryterium nie może występować prekryterium silnej preferencji **P** takie że a'_k **P** a_k.

Do modelu omówionego w poprzednim punkcie dołączymy dodatkowy parametr, określający oczekiwany przez decydenta poziom przewyższania pomiędzy porównywanymi zmiennymi losowymi β^*. Modyfikujemy prekryterium silnej (**P**) i słabej (**Q**) preferencji i zapisujemy je następująco:

1. X **P** Y, jeżeli $X\beta^*Y$ $\beta^* < \beta^{\max}$ i $\neg$ Y SD X,

2. X **Q** Y jeżeli $\beta^{\max} \leq \beta^*$ i X SD Y.

Przykład 3

Przyjmujemy parametry modelu analogiczne jak w przykładzie 2. Przykład ten jest szczególnym przypadkiem, w którym β^* = 0,5. Globalna relacja preferencji będzie zatem zgodna z rysunkiem 2. Następnie przyjmujemy β^* = 0,9. Dominacje stochastyczne oraz współczynniki $\beta^{\max}$ będą wyznaczone analogicznie jak w przykładzie 2, prekryteria podano w tabeli 11. Wyznaczono tylko jedną relację silnej preferencji

P pomiędzy wariantami a_2 i a_1 względem pierwszego kryterium. Jest to jedyny przypadek, w którym $\beta^* < \beta^{max}$.

Tabela 10

Prawdopodobieństwo β^{max}

Kryterium nr 1	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	1,00		0,50	0,20
a_3	0,50			
a_4	0,80		0,40	
Kryterium nr 2	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	0,30			
a_3	0,36	0,30		
a_4	0,42	0,35	0,28	
Kryterium nr 3	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	0,90		0,18	0,81
a_3	0,80			0,72
a_4	0,10			

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Tabela 11

Prekryteria

Kryterium nr 1	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	P		Q	Q
a_3	Q			
a_4	Q		Q	
Kryterium nr 2	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	Q			
a_3	Q	Q		
a_4	Q	Q	Q	
Kryterium nr 3	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1				
a_2	P		Q	Q
a_3	Q			Q
a_4	Q			

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Wszystkie silne preferencje względem kryterium 3, w porównaniu z przykładem 3, zmieniły się na słabe (tabela 11). Spowodowało to zanik weta, którym była silna preferencja pomiędzy wariantami a_3 i a_4 względem trzeciego kryterium.

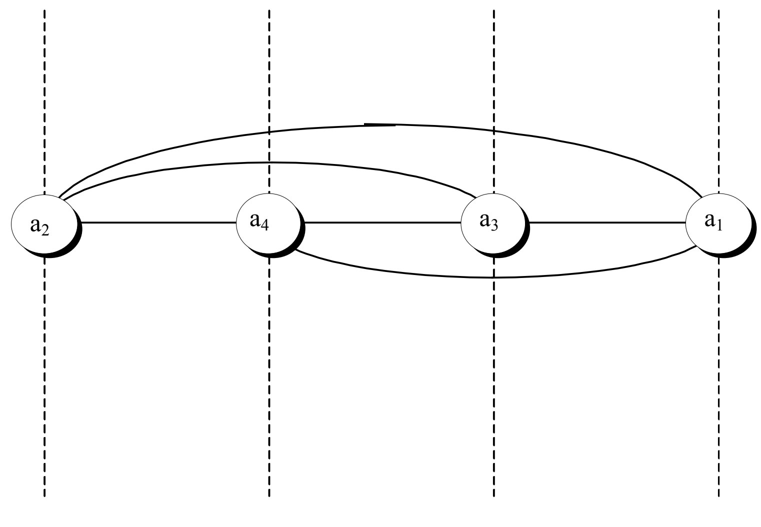
Tabela 12

Relacje preferencji pomiędzy wariantami

Preferencje	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1		~	~	~
a_2	>		>	>
a_3	>	~		~
a_4	>	~	>	

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Wariant decyzji a_2 nadal pozostaje niezdominowany, ale wyjaśniona została relacja pomiędzy a_4 i a_3, wskutek czego otrzymaliśmy zupełne uporządkowanie wariantów (rysunek 3).



Rys. 3. Globalna relacja preferencji dla $\beta^* = 0,9$
Ź r ó d ł o: opracowanie własne

Z przedstawionych analiz wynika, że poprzez zwiększenie wartości β^* zmniejszamy liczbę zweryfikowanych dominacji probabilistycznych o te, dla których prawdopodobieństwo β^{max} jest mniejsze od wartości β^*. Część prekryteriów, wyznaczonych jako silna preferencja, zmieni się na słabą preferencję, co w przypadku przeciwstawnych kryteriów może ograniczyć liczbę zaobserwowanych sytuacji weta, przez co zwiększyć liczbę wyjaśnionych relacji preferencji w globalnej relacji preferencji.

Podsumowanie

Parametryczna dominacja probabilistyczna umożliwia pomiar siły dominacji. Wprowadzenie parametru β^* do definicji dominacji probabilistycznej pozwala na określenie siły dominacji, której progiem nie musi być wartość 0,5, lecz dowolna wielkość z przedziału od 0,5 do 1. Parametryczna dominacja probabilistyczna, dzięki własności dominacji probabilistycznej, może być wykorzystana do ograniczenia liczby zaobserwowanych relacji między rozkładami. Relacja dominacji probabilistycznej będzie zachodziła dla pary rozkładów, dla których $\beta^{\max} = 0{,}6$, ponieważ $\beta^{\max} > \beta = 0{,}5$. Natomiast parametryczna dominacja probabilistyczna, przykładowo dla $\beta^* = 0{,}7$, już nie będzie zachodziła, gdyż $\beta^{\max} < \beta^*$. Ta własność parametrycznej dominacji probalistycznej została wykorzystana do modyfikacji metody wielokryterialnego wspomagania decyzji.

Zaproponowana modyfikacja w modelu wielokryterialnym AXE pozwala na wyznaczenie większej liczby relacji między wariantami, a przez to określenie bardziej adekwatnej globalnej relacji preferencji. Daje to możliwość zbudowania globalnej relacji preferencji, odpowiadającej celom i preferencjom decydenta. Ustalenie wartości β^* na poziomie 0,5 powoduje, że globalna relacja uwzględnia dominacje stochastyczne i dominację probabilistyczną. Parametr β^* bliższy jedności spowoduje zmniejszenie liczby zaobserwowanych dominacji probabilistycznych, wówczas ostateczne uporządkowanie zostanie zbudowane w oparciu o zaobserwowane dominacje stochastyczne. Zwiększanie β^* nie powoduje zmiany liczby prekryteriów. Może zamieniać jedynie istniejące prekryteria z silnych preferencji **P** na słabe preferencje **Q**. Przyjęcie parametru β^* na poziomie 1 spowoduje zamianę wszystkich silnych preferencji na słabe. Wyeliminuje to z analiz wszystkie sytuacje weta (19). Zmieniając zatem wartość parametru β^* w modelu uwypuklamy albo dominację stochastyczną (odnosząc się do postaw decydenta wobec ryzyka), albo dominację probabilistyczną. Opisany model analizy wielokryterialnej wykorzystujący parametryczną dominację stochastyczna – parametr β^* – jest nową metodą, łączącą dwa poprzednie podejścia zaproponowane przez K. Zarasia i J. Martela, model oparty wyłącznie na dominacjach stochastycznych [4]: oraz model wykorzystujący dominacje stochastyczne i dominację probabilistyczną [6].

Bibliografia

[1] GOOVAERTS M.J. (1984), *Insurance premium*, Elsevier Science, Publishers B. V.

[2] HADAR J., RUSSEL W.R. (1969), *Rules of Ordering Uncertain Prospects*, *American Economic Review*, 59 (3), 25–34.

[3] KEENEY R.L., RAIFFA H. (1976), *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs*, Wiley.
[4] MARTEL J.M., ZARAŚ K. (1994), *Multiattribute analysis based on stochastic dominance, in Models and Experiments in Risk and Rationality*, 225–248, Kluwer Academic Publishers.
[5] MARTEL J.M., ZARAŚ K. (1995), *Stochastic Dominance in Multicriterion Analysis under Risk*, Theory and Decisions, 39, 31–49.
[6] MARTEL J.M., ZARAŚ K. (1997), *Modelling Preferences Using Stochastic and Probabilistic Dominances*, International Conference on Methods and Applications of Multicriteria Decision Making, Mons, Belgium.
[7] QUIRK J.P., SAPOSNIK R. (1962), *Admissibility and Measurable Utility Functions*, Review of Economic Study, 29, 140–146.
[8] ROY B. (1990), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, WNT, Warszawa.
[9] TRZASKALIK T., TRZPIOT G., ZARAŚ K, (1998), *Modelowanie preferencji z wykorzystaniem dominacji stochastycznych*, Akademia Ekonomiczna, Katowice.
[10] WHITEMORE G.A. (1970), *Third Degree Stochastic Dominance*, 457–459, American Economic Review, 60, 457–459.
[11] WRATHER C, YU P.L. (1982), *Probability Dominance in Random Outcome*, Journal of Optimisation Theory and Application, 36, nr 3, 315–334.
[12] ZARAŚ K. (1989), *Dominance stochastique pour deus classes de fonction d'utilite: concaves et convexes*, RAIRO, Recherche operationelle, 23, 2, 57–65.

Parametric probabilistic dominance – multicriteria model

The paper shows the chosen elements of stochastic dominance and probabilistic dominance theory, as well as their utilization in multicriteria decision support problems.

First part of this work contains the definitions of stochastic dominations. Second part contains the most essential part of the paper. It describes the probabilistic dominance definition and its modification made by author. Using the property of probabilistic dominance author proposes $\beta^{\max}$, which defines the maximum level of probability. Next author defines the Parametric Probablistic Dominance PPD using the $\beta^{\max}$ as well as new parameter – β^{*} which allows to chose the strength of the domination.

The last, third part of the study shows the utilization of parametric probabilistic dominance to solve multicriteria decision support problem. By changing the value of parameter β^{*} in our multicriteria model we can put more strength on the stochastic dominance, or on the probabilistic dominance.

Keywords: *probabilistic dominance, parametric probabilistic dominance, stochastic dominance, multicriteria analysis*