B A D A N I A O P E R A C Y J N E I D E C Y Z J E

Nr 2 2005

Aleksander WOJNA*
Aneta KŁODZIŃSKA*

WIELOWYMIAROWE MODELE STEROWANIA ZAPASAMI I ICH ZASTOSOWANIE

W artykule przeprowadzono matematyczną formalizację wielowymiarowych modeli sterowania zapasami z wykorzystaniem procesów sum zmiennych losowych określonych na łańcuchu Markowa. Na podstawie tej formalizacji określono funkcję ryzyka funkcjonowania wielowymiarowych modeli sterowania zapasami. Rozpatrzono również zagadnienie analizy niezawodności funkcjonowania oraz ustalenia optymalnej struktury specjalnego systemu obsługi Markowa za pomocą określenia jego funkcji ryzyka.

Słowa kluczowe: *sterowania zapasami, model wielowymiarowy, funkcja ryzyka, łańcuch Markowa, system obsługi*

Model zaprezentowany w niniejszym artykule uogólnia klasyczne modele sterowania zapasami, jak również może się okazać pożytecznym w matematycznej formalizacji niektórych zagadnień teorii ubezpieczeń, teorii niezawodności, teorii obsługi masowej, matematyki finansowej, teorii ryzyka itp. [1]–[4].

Załóżmy, że na przestrzeni probabilistycznej $\{\Omega, \Phi, P\}$ określony został jednorodny łańcuch Markowa z dyskretnym czasem $\eta(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ i skończonym zbiorem stanów $E = \{1, 2, \ldots N\}$ oraz że

$$P = [p_{ij}],\ i \in E, j \in E;\ p_{ij} = P\{\eta(n+1) = j / \eta(n) = i\}$$

jest stochastyczną macierzą prawdopodobieństw przejść łańcucha $\eta(n)$, natomiast

$$\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N\},\ \pi_i = P\{\eta(0) = i\},\ i \in E$$

jest jego rozkładem początkowym. Niech $\xi_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots N$, $k = 0, 1, \ldots$ będzie rodziną niezależnych od łańcucha Markowa $\eta(n)$ nieujemnych zmiennych losowych, nie-

* Katedra Metod Ilościowych, Wydział Ekonomii i Zarządzania, Politechnika Koszalińska, ul. E. Kwiatkowskiego 6E, 75-343, Koszalin, avoina@hotmail.com, anetaklodzinska@wp.pl

zależnych między sobą dla różnych k oraz takich, iż rozkłady zmiennych losowych $\xi_j^{(k)}$ nie zależą od k. Oznaczmy $U_j(x) = P\{\xi_j^{(k)} < x\}$ dystrybuantę zmiennej losowej $\xi_j^{(k)}$ ($j = 1, 2, ..., N$). Załóżmy dalej, iż τ_1, τ_2, ... są niezależnymi, nieujemnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie:

$$H(t) = P\{\tau_i < t\},\ t \geq 0.$$

Zmienne te są niezależne zarówno od łańcucha Markowa $\eta(n)$, jak i od zbioru zmiennych losowych $\xi_j^{(k)}$. Natomiast

$$S(n) = \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_n,\ (S(0) = 0)$$

jest prostym procesem odnowy. Niech $\nu_n(j)$, $j = 1, 2, ..., N$ oznacza liczbę trafień łańcucha Markowa $\eta(t)$ w stan $j \in E$ w interwale czasu $[0, n]$, tzn.

$$\nu_n(j) = \sum_{k=0}^{n} \chi[\eta(k) = j],\ \ j = 1, 2, ..., N,$$

gdzie $\chi[A]$ indykator zdarzenia losowego A. Ponadto

$$\xi(n, j) = \sum_{k=1}^{n} \xi_j^{(k)} \chi[\eta(k) = j] = \sum_{k=1}^{\nu_n(j)} \xi_j^{(k)},\ \ j = 1, 2, ..., N.$$

Niech $Z = \{Z_1, Z_2, ..., Z_N\}$ będzie N-wymiarowym wektorem o dodatnich współrzędnych. Wtedy moment czasu $\mu(Z)$, określony równością

$$\mu(Z) = \min_{j=1,...,N} \{\mu(Z_j, j)\},$$

gdzie $\mu(Z_j, j) = \min\{n\colon\ \xi(n, j) > Z_j\}$ będziemy nazywać momentem przekroczenia wielowymiarowego stochastycznego procesu.

Funkcja

$$R(t, Z) = P\{S(\mu(Z)) < t\},\ t \geq 0 \tag{1}$$

może być traktowana jako funkcja ryzyka dla następującego wielowymiarowego modelu sterowania zapasami.

Rozpatrzmy magazyn, w którym magazynowane są towary N typów, których wstępny zapas określa się wektorem $Z = \{Z_1, Z_2, ..., Z_N\}$. Zgłoszenia wpływają do modelu w przypadkowych momentach czasu: $S(1)$, $S(2)$, ..., $S(k)$, ..., przy czym interwały czasu $\tau_1 = S(1)$, $\tau_2 = S(2) - S(1)$, ..., $\tau_k = S(k) - S(k-1)$, ... pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami są niezależnymi, nieujemnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie prawdopodobieństwa. Magazyn funkcjonuje w środowisku, które może się znajdować w jednym spośród N różnych stanów. Jeżeli w momencie $S(k)$ wpłynięcia k-tego zgłoszenia środowisko znajduje się w stanie j, to k-te w kolejności zgłoszenie wymaga towaru j-tego typu w ilości $\xi_j^{(k)}$, (j = 1, 2, ..., N, k = 0, 1, 2, ...). Zmiana stanów zewnętrznych środowiska odbywa się w sposób przypadkowy. Jeżeli $\eta(1)$, $\eta(2)$, ..., $\eta(k)$ są stanami środowiska w momentach $S(1)$, $S(2)$, ..., $S(k)$ wpłynięcia kolejnych zgłoszeń, to rozkład stanu środowiska $\eta(k+1)$ w momencie $S(k+1)$, pod warunkiem, że wartość $\eta(k)$ jest znana, zależy tylko od $\eta(k)$ i nie zależy od wartości $\eta(1)$, $\eta(2)$, ..., $\eta(k-1)$. Załóżmy, że magazyn istnieje po to, by realizować zapotrzebowanie na rozważane dobra w przedziale czasu $[0, T]$. Będziemy mówili, że w momencie $S(k) \in [0, T]$ w rozważanym modelu powstaje sytuacja „awarii", jeżeli zgłoszenie, które wpłynęło, nie może być zrealizowane w pełnym wymiarze.

Funkcją ryzyka dla rozważanego modelu będziemy nazywali prawdopodobieństwo $\varphi(T, Z_1, Z_2, ..., Z_N)$ powstania sytuacji „awarii" w przedziale czasu $[0, T]$ pod warunkiem, że wstępny zapas poszczególnych dóbr określa się wektorem $Z = \{Z_1, Z_2, ..., Z_N\}$. Łatwo można się przekonać, że

$$\varphi(T, Z_1, Z_2, ..., Z_N) = R(T, Z),$$

natomiast funkcja

$$\varphi^*(T, Z_1, Z_2, ..., Z_N) = 1 - R(T, Z)$$

określa prawdopodobieństwo skutecznego funkcjonowania magazynu.

Ponieważ zmienne losowe $\xi_j^{(k)}$, j = 1, 2, ..., N, podobnie jak i τ_k są nieujemne, można wprowadzić odpowiednie transformacje Laplace'a $u_j(s)$, j = 1, 2, ..., N, $h(w)$ dla rozkładów $U_j(x)$, j = 1, 2, .., N, $H(t)$ rozpatrywanych zmiennych losowych:

$$u_j(s) = E(e^{-s\xi_j^{(k)}}) = \int_0^\infty e^{-sx} dU_j(x), \tag{2}$$

$$h(w) = E(e^{-w\tau_k}) = \int_0^\infty e^{-wt} dH(t). \tag{3}$$

Oznaczmy przez

$$r^*(w, Z_1, Z_2, ..., Z_N) = \int_0^\infty e^{-wt} d_t R(t, Z_1, Z_2, ..., Z_n), \tag{4}$$

$$r(w, s_1, ..., s_N) = \int_0^\infty \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-s_1 Z_1 - ... - s_N Z_N} r^*(w, Z_1, ..., Z_N) dZ_N, ..., dZ_1. \tag{5}$$

Twierdzenie 1. Prawdziwa jest następująca równość:

$$r(w, s_1, s_2, ..., s_N) = \pi P[E - \Phi(w, s_1, s_2, ..., s_N)]^{-1} D(s_1, s_2, ..., s_N) I, \tag{6}$$

gdzie E – jednostkowa macierz wymiaru $N \times N$; $\Phi(w, s_1, s_2, ..., s_N) = [\Phi_{ij}(w, s_i)]$, $i, j = 1, 2, ..., N$ – macierz wymiaru $N \times N$, której elementy są określone równością

$$\Phi_{ij}(w, s_i) = p_{ij}\, h(w)\, u_i(s_i);$$

$\mathbf{D}(w, s_1, s_2, ..., s_N) = \mathrm{diag}[D_{ii}(w, s_1, s_2, ..., s_N)]$, $i = 1, 2, ..., N$ – diagonalna macierz wymiaru $N \times N$, na której głównej przekątnej znajdują się funkcje postaci:

$$\mathbf{D}_{ii}(w, s_1, s_2, ..., s_N) = h(w)\frac{1-u_i(s_i)}{s_1 s_2 \cdot ... \cdot s_N};$$

oraz I – wektor kolumnowy wymiaru N złożony z jedynek.

Aby wykazać prawdziwość relacji (6), wprowadzimy macierz $\Theta(T, Z) = [R_{ij}(T, Z)]$, $i \in E, j \in E$, złożoną z warunkowych rozkładów momentów powstania w magazynie pierwszej awaryjnej sytuacji. Indeksy $j \in E$, $i \in E$ rozkładu $R_{ij}(T, Z)$ oznaczają, iż sytuacja awaryjna została spowodowana brakiem towaru j-tego rodzaju, pod warunkiem, że $\eta(0) = i$. Określimy również zbiór warunkowych dystrybuant:

$$\{F_{ij}^{(n)}(T, Z_1, ..., Z_N),\, i \in E, j \in E\}, \quad n = 0, 1, ...,$$

gdzie:

$$F_{ij}^{(n)}(T, Z_1, ..., Z_N) = P\{S(n) < T,\ \xi(n, 1) < Z_1,$$

$$..., \xi(n, N) < Z_N,\ \eta(n+1) = j / \eta(0) = i\};$$

oraz zbiór warunkowych wartości oczekiwanych, określonych wzorem

$$\widetilde{F}_{ij}^{(n)}(w, s_1, ... s_N) = E[e^{-wS(n)} e^{-s_1\xi(n,1)-...-s_N\xi(n,N)}\ \chi[\eta(n+1) = j / \eta(0) = i]].$$

Rozważając podobnie jak przy wyprowadzeniu twierdzenia w [5], otrzymujemy równość:

$$\widetilde{F}^{(n)}(w, s_1, ..., s_N) = \widetilde{F}^{(n-1)}(w, s_1, ..., s_N)\ \Phi(w, s_1, ..., s_N),$$

gdzie $\widetilde{F}^{(n)}(w, s_1, ..., s_N) = \left\lfloor \widetilde{F}_{ij}^{(n)}(w, s_1, ..., s_N) \right\rfloor$, $i \in E, j \in E$, $n = 0, 1, ...$, przy czym $\widetilde{F}^{(0)}(w, s_1, s_2, ... s_N) = P$. Na podstawie warunkowych rozkładów $R_{ij}(T, Z)$, $i \in E$, $j \in E$, określimy funkcje $r_{ij}{}^*(w, Z_1, Z_2, ..., Z_N)$ (podobnie do funkcji $r^*(w, Z_1, ..., Z_N)$ (4)) oraz $r_{ij}(w, s_1, s_2, ..., s_N)$ (podobnie do funkcji $r(w, s_1, s_2, ..., s_N)$ (5)). Wprowadzimy macierz $\widetilde{\mathbf{\Theta}}(w, s_1, s_2, ... s_N) = [r_{ij}(w, s_1, s_2, ..., s_N)]$, $i \in E, j \in E$. Wtedy, analizując fakt zajścia w tym samym czasie zdarzeń $S(\mu(Z)) < T$, oraz $\eta(\mu(Z)) = j$, występujących w definicji rozkładu $R_{ij}(T, Z)$, otrzymujemy następującą równość:

$$\widetilde{\mathbf{\Theta}}(w, s_1, s_2, ...s_N) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{F}^{(n-1)}(w, s_1, s_2, ...s_N)\mathbf{D}(w, s_1, s_2, ...s_N) .$$

Biorąc pod uwagę oczywistą relację $R(T, Z) = \pi\Theta(T, Z_1, ..., Z_N)I$ oraz wynikającą z założeń modelu zbieżność szeregu macierzowego $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(w, s_1, s_2, ...s_N)^n$, dostaniemy ostateczne uzasadnienie równości (6).

Załóżmy teraz, że mamy do czynienia z systemem obsługi Markowa, który może funkcjonować w dwóch trybach: 1) trybie „pasywnym", gdy system jest pusty i czeka na kolejne zgłoszenie oraz 2) trybie „aktywnym", gdy system wykonuje kolejne zgłoszenie. Intensywności strumienia wpływających do systemu zgłoszeń oraz procesu obsługi zgłoszeń są równe odpowiednio λ oraz μ. Funkcjonowanie systemu potrzebuje pewnego surowca i wstępnie posiadana ilość jego zapasu jest równa M. Prawdopodobieństwo tego, iż w interwale czasu $[t, t + \Delta t]$ powstanie konieczność wykorzystania jakiejś ilości posiadanego zapasu wynosi $\nu\Delta t + o(\Delta t)$, gdzie $\nu > 0$ jest dodatnią liczbą, natomiast symbol $o(\Delta t)$ oznacza, iż $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$. Ilość ta jest zmienną losową, której rozkład zależy od trybu, w którym system się znajduje w momencie t. Dla trybu 1) jest to zmienna losowa ξ o dystrybuancie $K(x)$, dla trybu 2) natomiast – zmienna losowa ζ o dystrybuancie $D(x)$. Należy zatem łączny zasób surowca M podzielić na dwie części Z_1 oraz Z_2, które mogą być wykorzystane odpowiednio w trybie 1) oraz 2).

System musi funkcjonować w przedziale czasu $[0, T]$ oraz $R(T, Z_1, Z_2)$ oznacza prawdopodobieństwo powstania sytuacji „awarii" systemu, czyli sytuacji, gdy w jakimś momencie $t \in [0, T]$ zabraknie surowca.

Wprowadzimy punktowy proces stochastyczny $S(k)$, $k = 1, 2, ...$ momentów kolejnych tankowań systemu, zakładając, że $S(0) = 0$. Oznaczmy również przez $\tau_k = S(k) - S(k-1)$, $k = 1, 2, ...$ interwały czasu między kolejnymi tankowaniami. Przy założeniach przyjętych wobec badanego systemu, $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie wykładniczym z parametrem ν. Oznacza to, iż

$$H(t) = 1 - e^{-\nu t}, \ t \geq 0$$

oraz

$$h(w) = E(e^{-w\tau_k}) = \frac{\nu}{\nu + w} .$$

Oznaczmy przez $m(t)$, $t \geq 0$ tryb, w jakim znajduje się system w czasie t. Wtedy $m(t)$, $t \geq 0$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z ciągłym czasem, o dwóch ewentualnych stanach: $m(t) \in [1, 2]$, („1" oznacza tryb 1), „2" oznacza tryb 2). Niech

$$p_{ij}(t) = P\{m(t) = j/m(0) = i\}, \quad i, j \in [1, 2]$$

oznacza funkcję przejść procesu $m(t)$, oraz

$$\eta(n) = m(S(n)), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Wtedy $\eta(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z dyskretnym czasem o dwóch stanach: $\eta(n) \in [1, 2]$. Ponieważ moment $S(1) = \tau_1$ jest niezależną od procesu $m(t)$ zmienną losową o wykładniczym rozkładzie z parametrem ν, stosując więc wzór określający prawdopodobieństwo całkowite, otrzymujemy

$$p_{ij} = P\{\eta(n+1) = j/\eta(n) = i\} = P\{m(\tau_1) = j/\{m(0) = i\} = \nu\int_0^\infty e^{-\nu t} p_{ij}(t)dt\,.$$

Zatem

$$p_{ij} = \nu\widetilde{p}_{ij}(\nu)\,, \quad i, j = 1, 2,$$

gdzie $\widetilde{p}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_{ij}(t)dt$, $i, j = 1, 2$ są transformacjami Laplace'a funkcji przejść procesu $m(t)$. Zapisując dla funkcji przejść $p_{ij}(t)$ procesu $m(t)$ układ różniczkowych równań Kołmogorowa, a później dokonując w tym układzie transformacji Laplace'a, otrzymujemy dla macierzy $P = [p_{ij}]$, $i, j = 1, 2$, prawdopodobieństw przejść łańcucha $\eta(n)$, następujący wzór:

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \dfrac{\nu+\mu}{\nu+\mu+\lambda} & \dfrac{\lambda}{\nu+\mu+\lambda} \\ \dfrac{\mu}{\nu+\mu+\lambda} & \dfrac{\nu+\lambda}{\nu+\mu+\lambda} \end{bmatrix}.$$

Przyjmijmy dla przykładu, że zmienna losowa ξ ma rozkład wykładniczy z parametrem k, a zmienna losowa ζ ma rozkład wykładniczy z parametrem d. Wtedy odpowiednio $U_1(x) = K(x) = 1 - e^{-kx}$, $u_1(s) = E(e^{-s\xi}) = \dfrac{k}{k+s}$ oraz $U_2(x) = D(x) = 1 - e^{-dx}$, $u_2(s) = E(e^{-s\zeta}) = \dfrac{d}{d+s}$. Jest oczywistym, że spełnione zostały wszystkie założenia twierdzenia 1. Na jego podstawie za pomocą bezpośrednich obliczeń otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład wykładniczy z parametrem k, zmienna losowa ζ ma rozkład wykładniczy z parametrem d oraz w momencie czasu $t = 0$ system znajduje się w trybie 1), to funkcję

$$r(w, s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1 Z_1 - s_2 Z_2} \left(\int_0^\infty e^{-wt} d_t R(t, Z_1, Z_2) \right) dZ_2 dZ_1$$

można przedstawić wzorem:

$$r(w, s_1, s_2) = \frac{\nu[(\nu + w)(d + s_2) - B\nu d]}{s_2(\nu + w)^2 (k + s_1)(d + s_2)V(w, s_1, s_2)}$$

$$+ \frac{B\nu\lambda k}{s_1(\nu + w)(\lambda + w)(k + s_1)(d + s_2)V(w, s_1, s_2)},$$

gdzie

$$V(w, s_1, s_2) = 1 - \frac{\nu}{\nu + w} \cdot \frac{d(\nu + \lambda)(k + s_1) + k(\nu + \mu)(d + s_2)}{(\nu + \lambda + \mu)(k + s_1)(d + s_2)}$$

$$+ \frac{\nu^3}{(\nu + w)^2} \cdot \frac{kd}{(k + s_1)(d + s_2)},$$

oraz

$$B = \frac{\nu}{\nu + \lambda + \mu}.$$

Będziemy mówili, iż rozpatrywany system ma optymalną strukturę, jeżeli podziału $M = Z_1 + Z_2$ posiadanego zasobu surowca dokonano w taki sposób, który maksymalizuje prawdopodobieństwo skutecznego funkcjonowania systemu. Znajomość funkcji ryzyka $R(T, Z_1, Z_2)$ pozwala sprowadzić zagadnienie określenia optymalnej struktury badanego systemu do znalezienia minimum funkcji $s(x) = R(T, x, M - x)$ w przedziale $x \in [0, M]$.

Warto również podkreślić, że twierdzenie 2 ma bardziej ogólny charakter i pozwala określić funkcję ryzyka $R(T, Z_1, Z_2)$ nie tylko dla wykładniczego rozkładu zmiennych losowych ξ i ζ. Zastępując funkcje $u_1(s)$, $u_2(s)$ przez transformacje Laplace'a dla innych rozkładów, otrzymamy odpowiednie dla tych rozkładów wnioski.

Bibliografia

[1] MANIKOWSKI A., TARAPATA Z., *Ocena projektów gospodarczych*, Difin, Warszawa 2001, 299 s.

[2] NOWAK E. (red.), *Ocena efektywności przedsięwzięć gospodarczych*, Akademia Ekonomiczna, Wrocław 1998.

[3] RONKA-CHMIELOWIEC W., *Ryzyko w ubezpieczeniach – metody oceny*, Akademia Ekonomiczna, Wrocław 1997.

[4] STEVENSON W.J., *Introduction to management science*, IRWIN, INC., Boston 1989, 844 s.
[5] VOINA A.A., KŁODZINSKA A., *Risk functions in multidimensional stock control models that function in a random Markov environment*, // Kibernetika i Sistemny Analiz., 2004, nr 4, 150–155.

The multivariate models of the reserves control and their applications

The multidimensional stock control that functions in a random Markov environment is considered. The mathematical formalization of this model was considered with the use of sums of the random variables defined on the Markov chains. The authors introduce a definition of risk function of the type of *downside risk measures* and find the explicit formulas for its determinations. The example of the application of these formulas is provided: the tasks of the reliability and optimal configuration for the queueing problem are regarded. The formulas defining the function by the system parameters were obtained

Keywords: *stock control, multidimensional model, risk function, Markov chain, queueing system*