

Grzegorz PRZEKOTA\*  
Daniel PRZEKOTA\*\*

## SZACOWANIE WYMIARU FRAKTALNEGO SZEREGÓW CZASOWYCH KURSÓW WALUT METODĄ PODZIAŁU POLA

W pracy zaproponowano alternatywny sposób liczenia ułamkowego (fraktalnego) wymiaru szeregów czasowych. Określa on, jak silnie szereg czasowy wypełnia swoją przestrzeń i służy między innymi do charakteryzowania szeregów danych giełdowych ze względu na stopień postrzępienia. Wymiar fraktalny obliczano dla wybranych szeregów czasowych kursów walut o dwóch długościach: 1000 i 100 danych. Przedstawiona metoda nadaje się zarówno do analizy szeregów długich, jak i krótkich. Otrzymane wyniki łatwo można interpretować oraz odnieść je do prezentacji graficznej szeregu, co jest ważne w praktycznych zastosowaniach.

Słowa kluczowe: *wymiar fraktalny, metoda podziału pola, szereg czasowy, kursy walut*

### Wstęp

W klasycznej teorii analizy szeregów czasowych danych giełdowych i inwestowania w papiery wartościowe nie korzysta się z narzędzi teorii chaosu. Teoria chaosu nie jest jeszcze powszechnie stosowana wśród badaczy, głównie ze względu na trudności powstające przy obliczaniu narzędzi, jakimi się posługuje i częste niejasności interpretacyjne. Niniejszy artykuł ma na celu przedstawienie jednego z narzędzi teorii chaosu – wymiaru fraktalnego, a także zaprezentowanie autorskiej metody szacowania tego wymiaru.

---

\* Politechnika Koszalińska, ul. Kwiatkowskiego 6, 73-343 Koszalin, e-mail: grzegorzprzekota@wp.pl

\*\* Uniwersytet im. M. Kopernika, ul. Gagarina 11, 87-100 Toruń, e-mail: danio150@wp.pl

Jedną z najpopularniejszych metod szacowania wymiaru fraktalnego jest metoda wariacyjna VM<sup>1</sup>. Jej rozwinięciem jest metoda segmentowo-wariacyjna SVM zaproponowana przez Zwolankowską<sup>2</sup>.

W niniejszym artykule przedstawione zostanie nieco inne podejście do szacowania wymiaru fraktalnego. Przykład zastosowania metody do analizy szeregów czasowych kursów akcji zamieszczono w pracy *Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych metodą podziału pola*<sup>3</sup>. W artykule tym przedstawiono jej zastosowanie w oszacowaniu wymiaru fraktalnego kursów walut.

## 1. Wymiar fraktalny szeregów czasowych

Geometria euklidesowa podaje wymiar przestrzeni, w której umieszczony jest szereg czasowy. Przestrzenią tą jest płaszczyzna o wymiarze euklidesowym – 2. Rozpatrując natomiast trajektorię szeregu czasowego jako łamaną, otrzymujemy wymiar euklidesowy – 1. Odchodząc od wymiaru euklidesowego można zauważyć, że wykres szeregu czasowego nie wypełnia całej płaszczyzny, na której został umieszczony, zatem jego wymiar będzie mniejszy od 2 i różny od 1, gdyż jest to wymiar euklidesowy prostej, a szeregi czasowe nie mają na ogół kształtu linii prostej.

Rozwiązaniem tej niedogodności jest wymiar fraktalny, scharakteryzowany przez Petersa: *Wymiar fraktalny, który opisuje, w jaki sposób obiekt (lub szereg czasowy) wypełnia swoją przestrzeń, jest wynikiem wszystkich czynników wpływających na system, którego wytworem jest dany obiekt (szereg czasowy)*<sup>4</sup>.

Wymiar fraktalny oznacza się przez  $D$  i nie musi on być liczbą całkowitą. Dla wykresów jednowymiarowych szeregów czasowych przyjmuje wartości z przedziału  $<1; 2>$ . Wartość 1 wymiar szeregu czasowego przyjmować będzie wówczas, gdy wykres będzie miał kształt linii prostej, a wartość 2, gdy będzie wypełniał pewien obszar dwuwymiarowy na płaszczyźnie. W praktyce wartości skrajne nie są osiągalne.

Skoro wymiar fraktalny ma opisywać, jak szereg czasowy wypełnia obszar, innymi słowy – jak zagęszcza się na płaszczyźnie, to większe zagęszczenie powodować będzie zwiększony wymiar fraktalny, a mniejsze zagęszczenie spowoduje mniejszy wymiar fraktalny. Dla szeregów czasowych oznacza to, że częste zmiany w różnych kierunkach

---

<sup>1</sup> B. Dubuc, J.F. Roques-Carmes, C. Tricot, S.W. Zucker, *Evolving the Fractal Dimension of Profiles*, Physical Review A 1989, Vol. 39, s. 1506.

<sup>2</sup> M. Zwolankowska, *Fraktalna geometria polskiego rynku akcji*, Uniwersytet Szczeciński, Rozprawy i Studia, t. 382, s. 63.

<sup>3</sup> G. Przekota, *Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych metodą podziału pola*, Zeszyty Studiów Doktoranckich, Zeszyt 12, Poznań 2003.

<sup>4</sup> E.E. Peters, *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997, s. 58.

będą powodować zwiększenie wymiaru i szereg będzie bardziej wypełniał płaszczyznę, a szeregi jednokierunkowe, z małą liczbą zmian, będą miały mniejsze wymiary fraktalne, ich kształty zaś będą bardziej zbliżone do kształtu prostej. Szeregi, w których występują częste zmiany w różnych kierunkach charakteryzuje zjawisko powrotu do średniej, a szeregi o małej liczbie zmian – zjawisko podtrzymania trendu. Odpowiednie wnioski można jednak wysnuć dopiero po obserwacji danych empirycznych.

Przykład zastosowania wymiaru fraktalnego do zjawisk naturalnych podaje Mandelbrot<sup>5</sup>. Problem dotyczy pomiaru długości linii brzegowej. Wynik zależy od długości miarki: im miarka jest krótsza, tym wynik dokładniejszy, gdyż pozwala uchwycić więcej krzywizn. Wymiar fraktalny umożliwia odpowiedź na pytanie, jak postrzępione są linie brzegowe. Im linie brzegowe są bardziej postrzępione, tym ich wymiar fraktalny jest większy. E. Peters podaje np. wymiar fraktalny linii brzegowej Norwegii – 1,52 i linii brzegowej Wielkiej Brytanii – 1,26<sup>6</sup>. Wynik ten jest zgodny z obserwacją mapy – linia brzegowa Norwegii jest bardziej postrzępiona od linii brzegowej Wielkiej Brytanii, a więc jej wymiar fraktalny jest większy i bardziej zbliżony do 2.

## 2. Geometryczny sposób wyznaczenia wymiaru fraktalnego

Jeden ze sposobów znalezienia wymiaru fraktalnego szeregów czasowych podaje E. Peters<sup>7</sup>: Wymiar fraktalny ustala się mierząc stopień postrzępienia linii. Należy policzyć liczbę kół o określonej średnicy, które potrzebne są do pokrycia całej linii. Następnie trzeba zmniejszyć ustaloną średnicę kół i powtórzyć obliczenia. Po przeprowadzeniu odpowiedniej liczby takich operacji można zauważyć, że liczba kół związana jest wykładniczo z długością promienia kół następującą relacją:

$$N_r = (2r)^D,$$

gdzie:

$N_r$  – najmniejsza liczba kół przy ustalonym  $r$ ,

$r$  – promień,

$D$  – wymiar fraktalny,

stąd wymiar fraktalny  $D$  jest współczynnikiem kierunkowym prostej regresji

$$\log N_r = D \log(2r).$$

Jest to jednak mało efektywny sposób wyliczenia wymiaru fraktalnego, gdyż wymaga wielu geometrycznych konstrukcji. Podobnie liczy się wymiar fraktalny metodą

<sup>5</sup> B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, New York 1982.

<sup>6</sup> E. E. Peters, *Teoria chaosu...*, op. cit., s. 60.

<sup>7</sup> Ibidem.

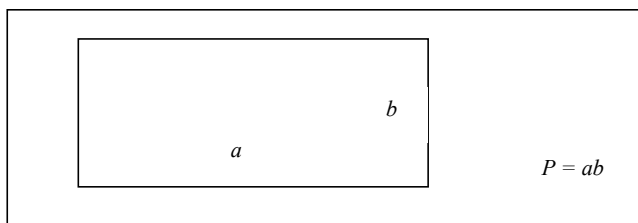
pudełkową BCM, z tym że zamiast kół zlicza się kwadraty o określonej długości boku potrzebne do pokrycia wykresu szeregu czasowego.

### 3. Metoda podziału pola

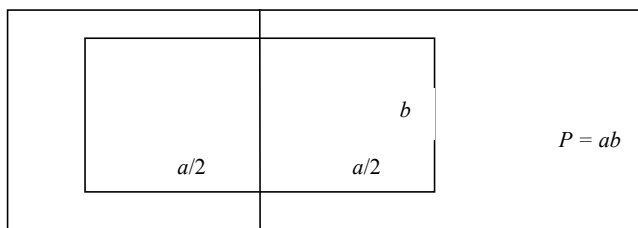
Autorska metoda szacowania wymiaru fraktalnego przedstawiona w niniejszym opracowaniu łączy elementy metod segmentowo-wariacyjnej oraz tradycyjnych metod geometrycznych. Podobnie jak w metodzie segmentowo-wariacyjnej wykres szeregu czasowego pokrywany będzie przez prostokąty, samo szacowanie wymiaru fraktalnego będzie natomiast polegać na określeniu współczynnika regresji, podobnie jak w metodach geometrycznych.

Należy założyć, że ma się do dyspozycji kawałek płaszczyzny w kształcie prostokąta o podstawie  $a$  i wysokości  $b$ . Pole tego prostokąta będzie wynosić  $P = ab$  (rysunek 1). Prostokąt zostanie podzielony na połowy, dlatego też pole  $P$  nazwiemy pierwotnym (przed podziałem). Następnie dzieli się pierwotny prostokąt na dwie równe części pionową prostą (rysunek 2). Pole powstałych dwóch prostokątów będzie wynosić  $p$ , ale  $p = P$ , ponieważ

$$\frac{a}{2} \cdot b + \frac{a}{2} \cdot b = \frac{2ab}{2} = ab = P.$$



**Rys. 1.** Prostokąt o polu  $P$   
Źródło: opracowanie własne.

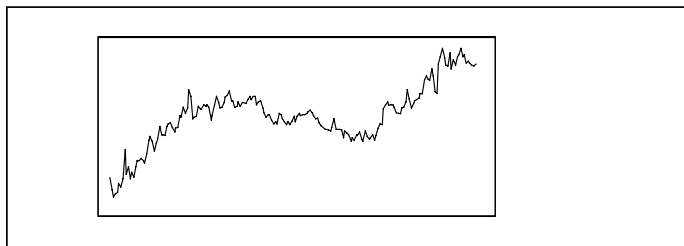


**Rys. 2.** Prostokąt o polu  $P$  po podziale  
Źródło: opracowanie własne.

Kolejne przepoławianie prostokątów nie zmieni faktu, że suma pól zawsze będzie wynosić  $P$ . Oznacza to, że suma pól  $P$  po podziale prostokąta na dowolną liczbę równych prostokątów pionowymi liniami będzie taka sama, jak suma pól  $p$  po podziale dwukrotnie gęstszym od danego (pierwotny może być podział np. na trzy prostokąty, a następny na sześć). Dla dowolnego podziału zachodzi więc tutaj związek:

$$p = 2 \frac{P}{2}.$$

W prostokącie należy umieścić wykres szeregu czasowego.



**Rys. 3.** Szereg czasowy na płaszczyźnie  
Źródło: opracowanie własne.

Niech szereg czasowy ma długość  $N$ ; wtedy pole obszaru zajmowanego przez szereg można wyliczyć ze wzoru

$$P = N(x_{\max} - x_{\min}), \quad (1)$$

gdzie  $x_{\max}$  i  $x_{\min}$  są odpowiednio największą i najmniejszą wartością w szeregu.

Należy podzielić prostokąt zajmowany przez szereg czasowy pionową prostą na połowy i znaleźć sumę pól  $p$  powstałych połówek, stosując wzór (1) do każdej połówki:

$$p = \frac{N}{2}(x_{\max_1} - x_{\min_1}) + \frac{N}{2}(x_{\max_2} - x_{\min_2}). \quad (2)$$

Pomiędzy  $p$  a  $P$  zachodzi nierówność

$$p \leq P. \quad (3)$$

Powtarzając czynność przepoławiania skończoną ilość razy, za każdym razem okaże się, że suma pól połówek w stosunku do sumy pól pierwotnych jest od nich nie większa. Oznacza to, że przy dowolnym podziale pierwotnym na  $k$  części pole zajmowane przez wykres szeregu będzie wynosić

$$P_k = \frac{N}{k} \sum_{i=1}^k (x_{\max_i} - x_{\min_i}), \quad (4)$$

a przy podziale na  $2k$  części

$$p_{2k} = \frac{N}{2k} \sum_{i=1}^{2k} (x_{\max_i} - x_{\min_i}). \quad (5)$$

Pomiędzy  $P_k$  i  $p_{2k}$  zachodzi nierówność

$$p_{2k} \leq P_k. \quad (6)$$

Oczywiste jest, że

$$p_{2k} \leq 2 \frac{P_k}{2}. \quad (7)$$

Równość we wzorze (7) zachodzi jedynie dla wykresów szeregów czasowych całkowicie wypełniających swoją płaszczyznę. Jeżeli szereg będzie miał kształt linii prostej (np. rosnącej jak niżej w przykładzie 2), to pomiędzy  $p$  a  $P$  zachodzić będzie równość

$$p_{2k} = 1 \frac{P_k}{2}. \quad (8)$$

Równość ta zachodzi także dla łamanej, począwszy od pewnego podziału. Dla dowolnego szeregu

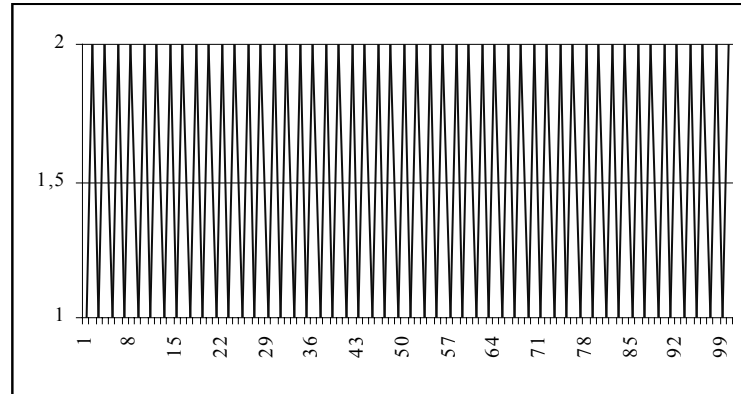
$$p_{2k} = D \frac{P_k}{2}, \quad (9)$$

gdzie  $D$  zawierać się będzie w przedziale  $<1;2>$  i będzie tym większe, im kształt trajektorii szeregu czasowego będzie bardziej postrzępiony, czyli im częściej w szeregu będzie występować zmiana trendów na przeciwne. Wartość  $D$  natomiast będzie tym bliższa 1, im kształt szeregu będzie bliższy prostej, czyli im mniej będzie w szeregu zmian trendów na przeciwne. Jeśli w układzie współrzędnym na osi  $x$  będzie się odkładać wartości  $P/2$ , a na osi  $y$  wartości  $p$ , to wartość  $D$  będzie współczynnikiem regresji prostej oszacowanej dla punktów  $(P/2; p)$ . Tak zdefiniowana wartość  $D$  może być traktowana jako miara postrzępienia szeregów, czyli jako wymiar fraktalny szeregów. Można rozważyć kilka przypadków szczególnych, które opisano w przykładach 1 i 2.

### Przykład 1

Zakłada się, że szereg ma następującą postać: 1, 2, 1, 2, 1, 2 itd. i jest szeregiem długości 100.

Dla całego szeregu  $N = 100$ ,  $x_{\max} = 2$ ,  $x_{\min} = 1$ , stąd  $P = 100$ . Po przepołowieniu szeregu otrzymuje się dwa szeregi długości 50, w których  $x_{\max} = 2$ ,  $x_{\min} = 1$ . Pole każdego prostokąta jest równe 50, a suma  $p = 100$ . Szeregi długości 50 są z kolei pierwotnymi dla szeregów długości 25, w których  $x_{\max} = 2$ ,  $x_{\min} = 1$ , a stąd pole każdego prostokąta jest równe 25, a suma 100. Jest to jeden z możliwych podziałów szeregu długości 100. Drugi podział – to podział najpierw na szeregi długości 20, potem 10, a następnie 5.



**Rys. 4.** Wykres szeregu z przykładu 1  
Źródło: opracowanie własne.

W każdym z tych przypadków suma pól jest równa 100. Przeprowadzając oszacowanie wymiaru fraktalnego  $D$ , otrzymujemy wartość 2, co jest równoznaczne z tym, że powyższy szereg zajmuje całą swoją płaszczyznę, a to oznacza także, że mamy do czynienia ze zjawiskiem powrotu do średniej.

**Tabela 1**

Pola zajmowane przez szereg w kolejnych podziałach

$N$	$N/2$	$P$	$p$
100	50	100	100
50	25	100	100
20	10	100	100
10	5	100	100

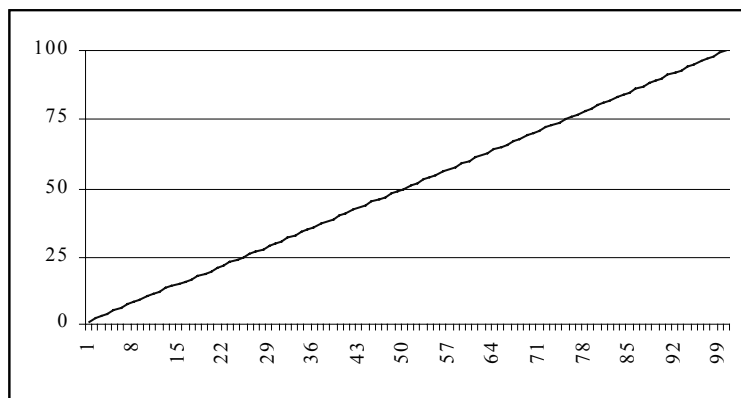
Źródło: opracowanie własne.

### Przykład 2

Zakłada się, że szereg ma następującą postać: 1, 2, 3, 4 itd. i jest szeregiem długości 100.

Dla całego szeregu  $N = 100$ ,  $x_{\max} = 100$ ,  $x_{\min} = 1$ , stąd  $P = 9900$ . Po przepołowieniu szeregu otrzymujemy dwa szeregi długości 50, w pierwszym  $x_{\max} = 50$ ,  $x_{\min} = 1$ , w drugim  $x_{\max} = 100$ ,  $x_{\min} = 51$ , stąd pole każdego jest równe 2450, a suma  $p = 4900$ . Szeregi długości 50 są z kolei pierwotnymi dla szeregów długości 25, w których każde pole jest równe 600, a suma  $p = 2400$  (przy polu pierwotnym  $P = 4900$ , dla  $N = 50$ ). Jest to jeden z możliwych podziałów szeregu długości 100 na połowy. Drugi podział – to podział najpierw na szeregi długości 20, potem 10, a następnie 5. Wyniki tych podziałów umieszczono w tabeli 2. Przeprowadzając oszacowanie wymiaru

fraktalnego  $D$ , otrzymuje się wartość 0,9861, co jest równoznaczne z tym, że wykres szeregu stanowi linię prostą. Oznacza to również zjawisko jednokierunkowego trendu.



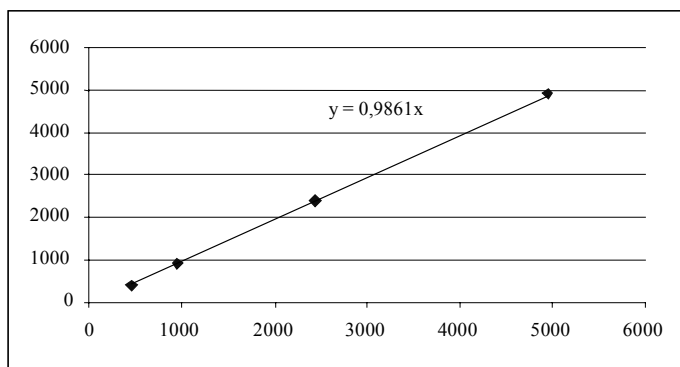
**Rys. 5.** Wykres szeregu z przykładu 2  
Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 2**

Pola zajmowane przez szereg przy kolejnych podziałach

$N$	$N/2$	$P$	$p$
100	50	9900	4900
50	25	4900	2400
20	10	1900	900
10	5	900	400

Źródło: opracowanie własne.



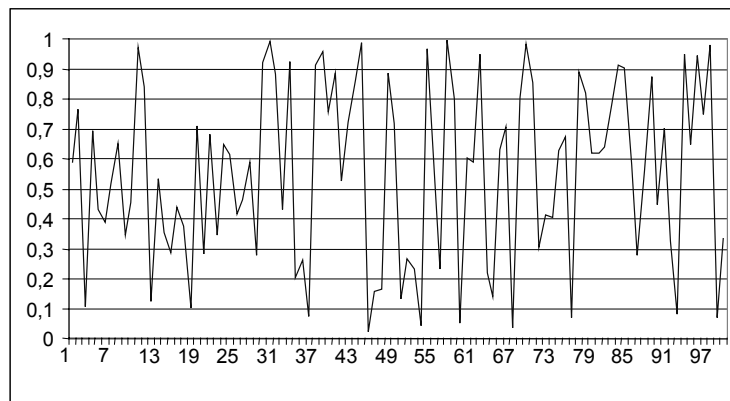
**Rys. 6.** Punkty  $(P/2; p)$  wraz z oszacowaną linią regresji  
Źródło: opracowanie własne.



Wartość  $D = 0,9861$ , otrzymana w tym przykładzie, wskazuje, że analizowany szereg czasowy jest szeregiem dyskretnym. W przypadku wykresów ciągłych tego typu wartość  $D$  wynosi dokładnie 1, co jest oczywistą konsekwencją przyjętych w metodzie założeń. Wartość 1 oznacza linię prostą i nie jest osiągnięta dla szeregów innego typu.

### Przykład 3

Weźmy pod uwagę ciąg liczb losowych długości 100 o rozkładzie jednostajnym w przedziale  $[0, 1]$ , wygenerowany za pomocą komputera.



Rys. 7. Wykres szeregu z przykładu 3

Źródło: opracowanie własne.

Oszacowanie wartości wymiaru fraktalnego dla szeregu, którego wykres przedstawiono na rysunku 7 dało wartość 1,778. Wielokrotne iteracje komputerowe dały natomiast wartość średnią dla tego typu szeregów – 1,775. Wartość ta może stanowić podstawę odniesienia przy rozróżnianiu szeregów losowych od nielosowych oraz stopnia postrzępienia.

## 4. Analiza szeregów czasowych kursów walut

Poddano analizie szeregi czasowe długości 1000 i 100 danych czterech walut: euro, dolara amerykańskiego, franka szwajcarskiego i funta brytyjskiego. Szeregi długości 1000 danych obejmują trzy okresy zachodzące na siebie w ten sposób, że pominięto około 120–140 danych początkowych (w przybliżeniu pół roku) i dołożono tę samą liczbę danych na końcu szeregu. Szeregi długości 100 danych nie zachodzą na siebie, a następują po sobie. Szczegółowe okresy, w jakich przeprowadzono analizę podano w tabelach 3 i 4.

#### 4.1. Szeregi długości 1000

Tabela 3

Wyniki obliczeń wymiaru fraktalnego  $D$  dla wybranych szeregów

Lp.	Okres badania		Waluta			
			EUR	USD	CHF	GBP
1	04.01.1999	17.12.2002	1,3971	1,4164	1,5092	1,4944
2	01.07.1999	17.06.2003	1,5098	1,5390	1,4788	1,4899
3	11.02.2000	30.01.2004	1,3687	1,4547	1,3677	1,5235

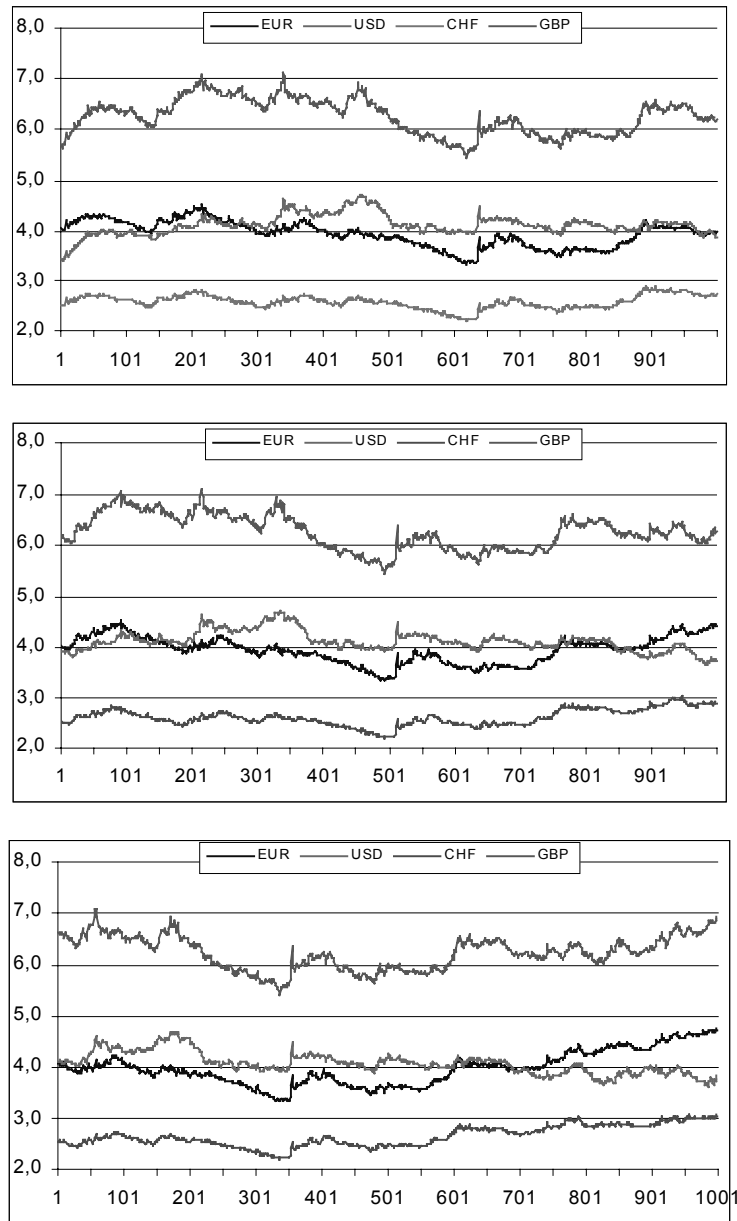
Źródło: obliczenia własne na podstawie danych NBP.

Szeregi, dla których wyznaczono wartości wymiaru fraktalnego  $D$  (tabela 1) zobrazowano na rysunku 8.

Pierwszy i trzeci szereg czasowy kursów euro mają podobny wymiar fraktalny, nieco niższy niż 1,4, natomiast szereg drugi ma wymiar fraktalny przekraczający 1,5. Przesunięcie szeregu pierwszego do drugiego pozbawiło szereg pierwszej początkowej fazy łagodnych zmian – najpierw rosnących, potem malejących, a wprowadziło w szereg drugim fazę dość gwałtownych zmian w różnych kierunkach, co spowodowało wzrost wymiaru fraktalnego. Przejście szeregu drugiego w trzeci dokonało się natomiast przez obcięcie w szeregu drugim początkowej fazy dość dużych zmian – najpierw wzrostowych, a później spadkowych na rzecz kontynuacji trendu wzrostowego w szeregu trzecim. Trendu stosunkowo „poszarpanego”, ale za to dość wyraźnego, co spowodowało spadek wartości wymiaru fraktalnego.

Wymiary fraktalne dla szeregów czasowych kursów dolara amerykańskiego są podobne do oszacowań dla szeregów czasowych euro, choć zawsze kilka setnych wyższe. Wymiar fraktalny pierwszego szeregu czasowego kursów dolara jest najmniejszy, drugiego – największy. Wzrost wymiaru fraktalnego szeregu drugiego został spowodowany usunięciem z szeregu pierwszego początkowej fazy bardzo łagodnego trendu wzrostowego i słabego trendu bocznego na rzecz stosunkowo silnych zmian w obydwu kierunkach w końcowej fazie szeregu drugiego. Z kolei spadek wymiaru fraktalnego szeregu trzeciego spowodowany został złagodzeniem końcowych zmian obserwowanych w szeregu drugim.

Inaczej od wymiaru fraktalnego szeregów euro i dolara prezentował się wymiar fraktalny szeregów czasowych kursów franka szwajcarskiego. W pierwszym szeregu jest on najwyższy, dalej obserwujemy jego stopniowe obniżanie, co jest wynikiem bardzo trwałego trendu wzrostowego obserwowanego w końcowych fazach szeregu drugiego i trzeciego, a skróceniem w tych szeregach początkowej fazy wahań kursów w obydwu kierunkach.



Rys. 8. Szeregi czasowe kursów walut odpowiadające okresom z tabeli 3  
Źródło: wykonanie własne.

Szereg pierwszy i drugi kursów funta brytyjskiego mają prawie identyczny wymiar fraktalny. Szereg trzeci, w którym nastąpiło obcięcie w porównaniu z drugim początko-

wej fazy – składającej się z krótkiego „gładkiego” trendu wzrostowego, a następnie niewielkiego spadkowego, na rzecz trendu wzrostowego, ale za to bardziej poszarpanego, ma wymiar fraktalny o kilka setnych wyższy od pierwszego i drugiego szeregu.

Porównując wymiary fraktalne wszystkich analizowanych walut można powiedzieć, że stosunkowo najwyższe i jednocześnie najbardziej stabilne są wymiary fraktalne szeregów czasowych funta brytyjskiego. Oznacza to, że kursy tej waluty stosunkowo częściej niż kursy pozostałych walut zmieniają kierunek i zmiany tego kierunku są najsilniejsze. Najbardziej widoczne trendy obserwujemy w przypadku trzecich szeregów czasowych kursów euro i franka i dla tych szeregów wymiary fraktalne są najmniejsze spośród wyznaczonych.

#### 4.2. Szeregi długości 100

Tabela 4

Wyniki obliczeń wymiaru fraktalnego  $D$  dla wybranych szeregów

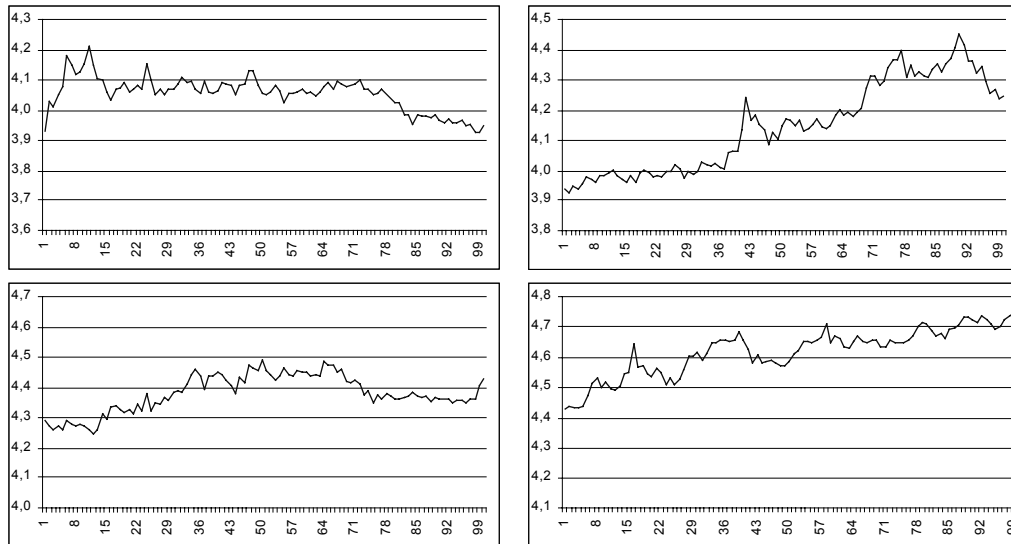
Lp.	Okres badania		Waluta			
			EUR	USD	CHF	GBP
1	02.07.2002	21.11.2002	1,4480	1,4332	1,4884	1,1584
2	22.11.2002	15.04.2003	1,2171	1,4335	1,2713	1,5385
3	16.04.2003	08.09.2003	1,4285	1,4287	1,6229	1,5073
4	09.09.2003	30.01.2004	1,2529	1,3808	1,3451	1,3621

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych NBP.

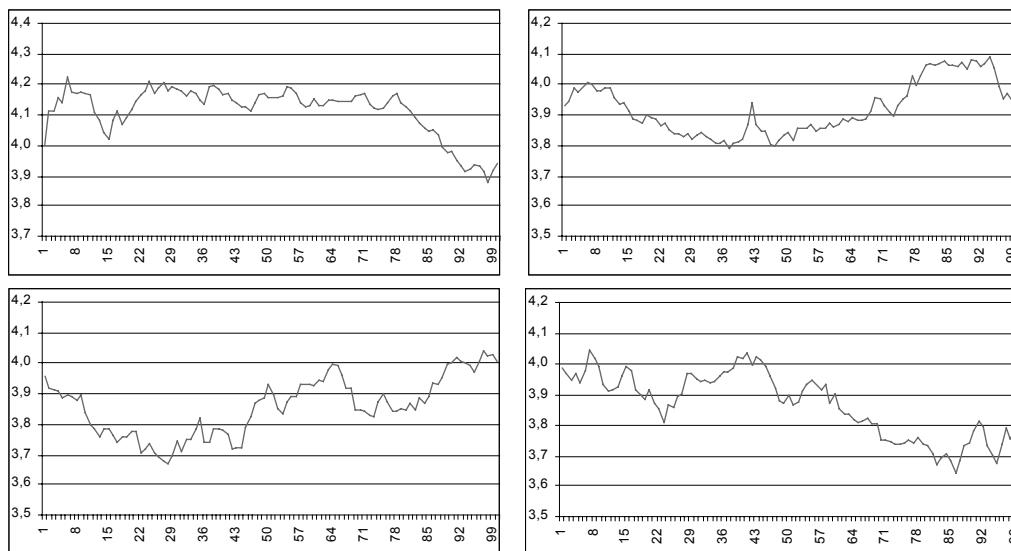
W przypadku szeregów czasowych euro obserwujemy dwie sytuacje (rysunek 9): szereg pierwszy i trzeci są szeregami o trendzie bocznym, natomiast szereg drugi i czwarty są szeregami o wyraźnie zaznaczonym trendzie wzrostowym. Dla szeregu pierwszego i trzeciego otrzymaliśmy wysokie oszacowania wymiaru fraktalnego (przeszło 1,4), co oznacza częstsze powroty do stanu średniego, natomiast dla szeregu drugiego i czwartego mamy niższe wartości wymiaru fraktalnego, co sugeruje kształt wykresu bliższy prostej. Najbardziej widoczny trend jest w szeregu drugim i tutaj też wartość wymiaru fraktalnego  $D$  jest najmniejsza.

W przypadku kursów dolara dla trzech pierwszych szeregów czasowych otrzymano zbliżone wartości wymiaru fraktalnego, co oznacza, że właściwości (kształt) wykresów kursów w tych trzech okresach są podobne. I rzeczywiście, we wszystkich trzech przypadkach mamy do czynienia z trendem bocznym. Jedynie w trzecim szeregu można dopatrywać się trendu wzrostowego, ale jest on bardzo „poszarpany”, z częstymi i dużymi odchyleniami w dół. Nieco silniej rysuje się trend w szeregu czwartym. Tutaj wartość wymiaru fraktalnego spadła o około 0,05 w porównaniu

z pozostałymi szeregami. Niewielki spadek jest wynikiem dość znacznych kilku odchyłeń kursu w górę od trendu spadkowego.



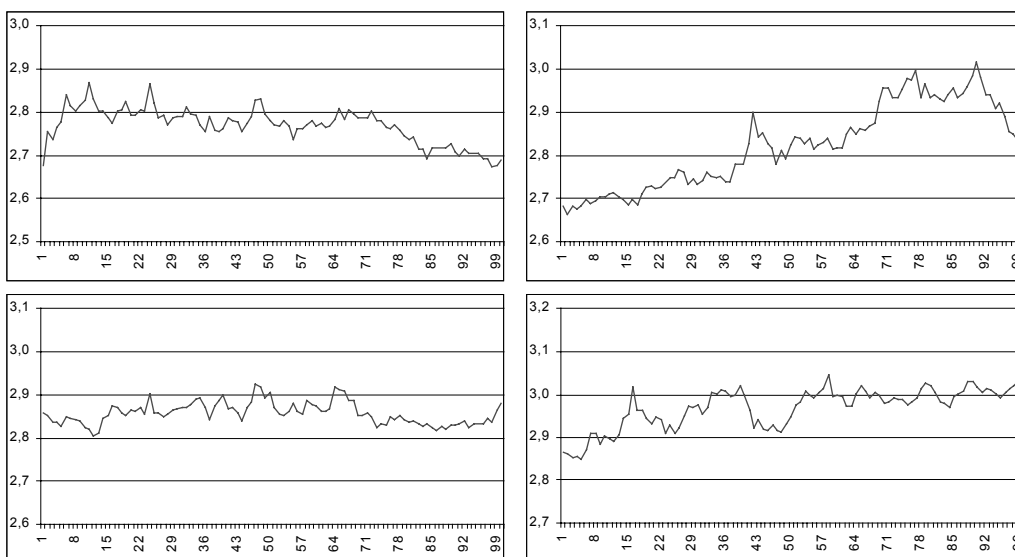
Rys. 9. Szeregi czasowe kursów euro odpowiadające okresom z tabeli 4



Rys. 10. Szeregi czasowe kursów dolara odpowiadające okresom z tabeli 4

W przypadku szeregów czasowych kursów franka szwajcarskiego mamy do czynienia wręcz z modelowym przykładem trendu bocznego z częstymi zmianami kursów to w górę to w dół, czyli z częstym powrotem wartości kursu do poziomu średniego. Dotyczy to szeregu trzeciego (rysunek 11), gdzie wartość wymiaru fraktalnego wynosi 1,6229. W przypadku szeregu pierwszego wartość wymiaru fraktalnego i wykres szeregu również informują o trendzie bocznym, jednak już z częstszymi choć krótkimi okresami podtrzymywania trendu, w tym przypadku spadkowego. Najwyraźniej trend rysuje się na rysunku 9 i dla tego szeregu wartość wymiaru fraktalnego  $D$  jest najmniejsza i wynosi 1,2713.

W przypadku trzech pierwszych szeregów czasowych funta wartości wymiaru fraktalnego są podobne i wynoszą nieco ponad 1,5, co znaczy, że brak w tych szeregach wyraźnego trendu jednokierunkowego, a wszelkie wychylenia kursów są redukowane trendami przeciwnymi. W szeregu czwartym pojawia się już wyraźny trend wzrostowy i natychmiast owocuje to zmniejszeniem wymiaru fraktalnego do poziomu 1,36.

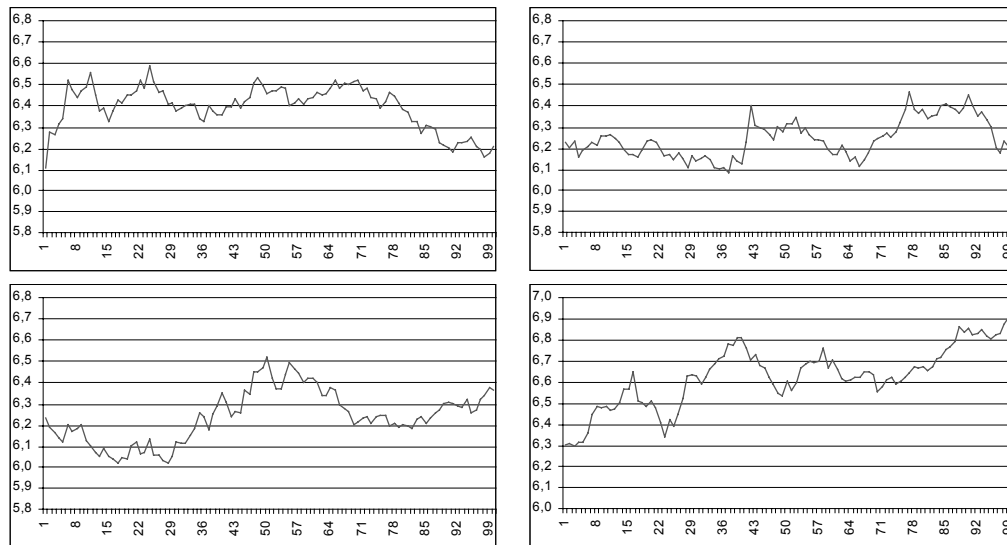


**Rys. 11.** Szeregi czasowe kursów franka odpowiadające okresom z tabeli 4

Źródło: wykonanie własne.

Dla omawianych szeregów czasowych długości 100 najmniejsze zmiany wymiaru fraktalnego obserwujemy w przypadku kursów dolara, gdzie trend wyraźnie zaznacza się dopiero w czwartym szeregu. Podobnie jest w przypadku kursu funta brytyjskiego. Różnica między nimi jest taka, że w przypadku dolara mamy do czynienia z trendem spadkowym, a w przypadku funta z trendem wzrostowym w ostatnim okresie. Najbardziej wyraźne podtrzymanie kursów obserwujemy w szeregach drugim i czwartym euro

oraz drugim franka, i dla tych szeregów mamy najmniejsze wymiary fraktalne. Najczęstsze zmiany kierunku kursów mamy natomiast w trzecim szeregu franka, gdzie uzyskano największy ze wszystkich szeregów kursów walut wymiar fraktalny  $D$ .



Rys. 12. Szeregi czasowe kursów funta odpowiadające okresom z tabeli 4  
Źródło: wykonanie własne.

## Podsumowanie

Analiza zaprezentowanych przykładów dostarcza bardzo ciekawych informacji. Można zauważyć kilka prawidłowości. Szeregi bardziej postrzępione mają wyższe wymiary fraktalne od szeregów mniej postrzępionych. Szeregi o przeważającym trendzie bocznym mają wyższe wymiary fraktalne od szeregów o wyraźnym trendzie wzrostowym lub spadkowym. Oczywiście te dwie informacje przenikają się wzajemnie, gdyż na odcinku o tej samej długości szereg o trendzie bocznym najczęściej jest bardziej postrzępiony od szeregu o wyraźnym trendzie, a to ze względu na częstszą liczbę zmian w różnych kierunkach. Szereg taki bardziej upodabniał się do szeregu rozpatrywanego w przykładzie 1, a więc szeregu wypełniającego bardziej zajmowany obszar, a co z tym – idzie do szeregu, w którym występuje zjawisko powrotu do średniej. Szeregi o wyraźnym trendzie wzrostowym lub spadkowym upodabniają się natomiast bardziej do prostej analizowanej w przykładzie 2, dlatego ich wymiary fraktalne są mniejsze. Oczywiście siła takiego trendu może być różna; ważne jest, aby był on widoczny.

### Bibliografia

- [1] DUBUC B., QUININOU J.F., ROQUES-CARMES C., TRICOT C., ZUCKER S.W., *Evaluating the Fractal Dimension of Profiles*, Physical Review A, Vol. 39, February 1989.
- [2] EDGAR G.A., *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, 1990.
- [3] FALCONER K., *Fractal geometry. Mathematical Foundations and Applications*, J. Wiley, 1997.
- [4] MANDELBROT B., *The fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, New York 1982.
- [5] PETERS E.E., *Teoria chaosu a rynki kapitalowe*, WIG-Press, Warszawa 1997.
- [6] PRZEKOTA G., *Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych metodą podziału pola*, Zeszyty Studiów Doktoranckich, zeszyt 12, s. 47–68, Poznań 2003.
- [7] SIEMIENIUK N., *Fraktalne właściwości polskiego rynku kapitalowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 2001.
- [8] ZWOLANKOWSKA M., *Fraktalna geometria polskiego rynku akcji*, Uniwersytet Szczeciński, Rozprawy i Studia, t. 382, Szczecin 2001.

### Estimating the fractal dimension of time series of currence values using area division method

In the paper the authors propose an alternative way of assessing fractional dimension of time series. This fractional dimension, called fractal dimension, determines how the time series fills its space. It is used, e.g., to characterise series of stock exchange data, for the sake of fray degree. This gives information on how often the series is changing direction and shows whether it is a situation of return to average or a situation of trend support.

The results, obtained by means of division method, are easy to interpret and link to graphic presentation of series. This is very important for practical use of this method.

The authors estimated the fractal dimension for chosen time series of currency values with length of 1000 and 100 data. The method presented turned out to be very useful for both long and short series. This is another advantage of the area division method, apart from the simplicity of estimation and lack of difficulties in interpretation of results.

Keywords: *fractal dimension, area division method, time series, currency values*