B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 2 2004

Krzysztof PIASECKI*

OPTYMALIZACJA KOSZTÓW PRZEBUDOWY PORTFELA JAKO ZADANIE TRANSPORTOWE

Wszystkie koszty generowane przez prowizje maklerskie są włączone do zadania optymalizacji portfela. Transformacja portfela jest opisana jako zadanie transportowe. Minimalne koszty transformacji portfela są osiągnięte za pomocą pewnego rodzaju otwartego zadania optymalizacyjnego. Naszkicowano możliwość korygowania stopy zwrotu portfela optymalnego obciążonego kosztami transakcji.

Słowa kluczowe: *zadanie transportowe, portfel aktywów finansowych, koszty transakcji, optymalizacja procesu przebudowy*

1. Problem badawczy

Zarządzanie portfelem aktywów finansowych w ogólnym przypadku polega na zbywaniu nisko cenionych aktywów finansowych i następnie na przeznaczeniu środków uzyskanych tą drogą na zakup wyżej cenionych aktywów finansowych. W szczególnym przypadku jednym z rozpatrywanych aktywów może być gotówka. Działania te są podejmowane w celu zwiększenia zysku, efekt jest jednak niwelowany ponoszeniem przez inwestora stosunkowo wysokich opłat prowizyjnych. Stąd wywodzi się zamiar uwzględnienia kosztów transakcji w opisie strategii zarządzania portfelem. Każdy z etapów tej strategii polega na przebudowaniu posiadanego portfela w portfel postulowany. Umożliwia to opisanie i optymalizowanie kosztów pojedynczego etapu wspomnianej strategii za pomocą zadania transportowego. Należy tu odpowiedzieć sobie na dwa pytania. Po pierwsze, czy jest możliwa minimalizacja kosztów przebudowy posiadanego portfela w postulowany portfel optymalny w sytuacji, gdy wykorzystywane kryterium optymalności portfela opisuje dokładnie strukturę tegoż portfela? Po drugie, czy korzy-

* Katedra Badań Operacyjnych, Wydział Zarządzania, Akademia Ekonomiczna, Al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, e-mail: k.piasecki@ae.poznan.pl

stanie z kryterium minimalizacji kosztów przebudowy portfela jako samoistnego kryterium wyznaczającego strategię inwestycyjną pozwala inwestorowi oczekiwać wzrostu stopy zwrotu z zarządzanego portfela? Prezentowana praca jest studium formalnym naszkicowanego powyżej problemu.

2. Pojedyncza transakcja

Symbol P_i oznacza informację o rodzaju i ilości jednostek i-tego aktywa finansowego. Opłacalność zainwestowania w aktywa finansowe P_i na ustalony okres oceniamy za pomocą stopy zwrotu r_i. Rozważamy transakcję

$$P_i \mapsto P_j \,, \tag{1}$$

polegającą na zbyciu aktywa P_i i nabyciu za uzyskane środki aktywa P_j. Transakcja (1) z założenia ma być opłacalna, co pozwala wnioskować, że odpowiednie stopy zwrotu spełniają nierówność

$$r_i < r_j \,. \tag{2}$$

Zakładamy tutaj *implicite* stałość rozpatrywanego horyzontu czasowego. Należy pamiętać, że przy dodatniej chwilowej stopie *spot* zarówno poszczególne stopy zwrotu, jak i ich dodatnia różnica Δr będą rosły. Przyjmując, że wartość bieżąca PV zbywanego aktywa osiąga poziom

$$PV(P_i) = C \,, \tag{3}$$

wartość bieżącą PV nabywanego aktywa musimy umniejszyć o prowizję do poziomu

$$PV(P_j) = \frac{1-\eta}{1+\eta} C \,, \tag{4}$$

gdzie symbol η oznacza stopę prowizji pojedynczej transakcji sprzedaży lub kupna. Wartości końcowe FV tych aktywów są wyrażone w postaci zależności

$$FV(P_i) = C(1+r_i) \,, \tag{5}$$

$$FV(P_j) = C\frac{1-\eta}{1+\eta}(1+r_j) \,. \tag{6}$$

Straty wynikające z przeprowadzenia transakcji (1) możemy określić jako spadek wartości końcowej aktualnie posiadanego aktywa. W tej sytuacji – podstawiając $C = 1$

w (5) i (6) – jednostkowe straty $L(P_i, P_j)$ generowane przez przeprowadzenie transakcji (1) dla jednej jednostki aktywa P_i określamy zależnością

$$L(P_i, P_j) = l_{i,j} = (1+r_i) - \frac{1-\eta}{1+\eta}(1+r_j)\,. \tag{7}$$

Opłacalność transakcji (1) jest równoważna z warunkiem

$$l_{i,j} < 0\,, \tag{8}$$

niezależnym już od wielkości transakcji C i opisującym ujemne straty jednostkowe. Ze swej natury stopa prowizji spełnia warunek

$$0 < \eta < 1\,, \tag{9}$$

co pozwala stwierdzić, że przy odpowiednio dużej dodatniej różnicy stóp zwrotu Δr transakcja (1) staje się opłacalna. Wobec wspomnianej już monotoniczności funkcji Δr zauważamy, że wraz z wydłużeniem się horyzontu inwestycyjnego rośnie szansa na to, że transakcja (1) stanie się transakcją opłacalną. Oznacza to, że warunek opłacalności (8) zawiera *implicite* w sobie warunek wyznaczający minimalny opłacalny horyzont czasowy inwestycji. Analizując zależność (7) zauważamy, że straty rosną wraz ze wzrostem stopy zwrotu r_i oraz wraz ze spadkiem stopy zwrotu r_j. Oznacza to, że zadanie minimalizacji strat jest równoważne z zadaniem maksymalizacji przyrostu stopy zwrotu.

3. Przebudowa portfela w zadany portfel optymalny

Załóżmy, że dysponujemy portfelem $\widetilde{P} = \{P_1; P_2; \ldots; P_n\}$, gdzie symbol P_i został zdefiniowany w rozdziale 2. Stosując dowolne, ale ustalone zadanie optymalizacyjne stwierdzamy, że postulowany optymalny portfel przyjmuje postać $\widetilde{P}' = \{P_1', P_2'; \ldots; P_n'\}$, gdzie symbol P_i' oznacza aktywa finansowe tego samego rodzaju co aktywa finansowe oznaczone symbolem P_i. Aktywa P_i i P_i' mogą się różnić liczbą jednostek, a w ogólnym przypadku przyjmujemy, że liczby jednostek pewnych aktywów mogą być równe zeru.

Udział wartości aktywa P_i w wartości portfela $\widetilde{P}$ wyraża się proporcją

$$\frac{PV(P_i)}{PV(\widetilde{P})} = \alpha_i\,, \tag{10}$$

określoną jednoznacznie, gdyż znamy strukturę posiadanego portfela. Udział wartości aktywa P_i' w wartości portfela $\widetilde{P}'$ dany jest za pomocą proporcji

$$\frac{PV(P_i')}{PV(\widetilde{P}')} = \alpha_i', \tag{11}$$

wyznaczonej jednoznacznie przez stosowane zadanie optymalizacyjne.

Rozważamy transakcję

$$\widetilde{P} = \{P_1; P_2; \ldots; P_n\} \to \widetilde{P}' = \{P_1'; P_2'; \ldots; P_n'\}, \tag{12}$$

oznaczającą zbycie części zbędnych aktywów portfela $\widetilde{P}$ i nabycie za uzyskane środki brakujących aktywów portfela $\widetilde{P}'$. Transakcję taką nazywamy przebudową portfela i możemy wyrazić równoważnie jako przesunięcie w postaci schematu

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \mapsto [\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n']. \tag{13}$$

Przyjmując, że wartość bieżąca *PV* posiadanego portfela osiąga poziom

$$PV(\widetilde{P}) = C, \tag{14}$$

wartość bieżącą *PV* postulowanego portfela musimy umniejszyć o prowizję do poziomu

$$PV(\widetilde{P}') = (1 - \lambda)C, \tag{15}$$

gdzie symbol λ oznacza indukowaną stopę prowizji, rozumianą jako iloraz zapłaconych prowizji do wartości bieżącej całego portfela $\widetilde{P}$. W tej sytuacji, gdy zbywamy jedynie zbędne aktywa i uzupełniamy brakujące, indukowana stopa prowizji spełnia warunek

$$\lambda < 1 - \frac{1-\eta}{1+\eta} = \frac{2\eta}{1+\eta}. \tag{16}$$

Zajmiemy się teraz opisem modelu kosztów tej przebudowy. Zestawiając razem (10) i (14), otrzymujemy

$$PV(P_i) = \alpha_i C, \tag{17}$$

zaś po zestawieniu razem (11) i (15) mamy

$$PV(P_i') = \alpha_i'(1 - \lambda)C. \tag{18}$$

Jeśli spełniony jest warunek

$$PV(P_j) < PV(P_j'), \tag{19}$$

to do zbycia aktywów P_j w ogóle nie dochodzi, gdyż aktywa te będą jedynie dokupywane. Fakt ten zmniejsza indukowaną stopę prowizji λ. Symbolem $\underline{\underline{K}}$ oznaczmy zbiór wszystkich indeksów oznaczających rodzaje dokupywanych aktywów finansowych. Mamy tutaj

$$\underline{\underline{K}} = \{j = 1, 2, ..., n : PV(P_j) < PV(P_j')\}. \tag{20}$$

Jeśli nierówność (19) nie jest spełniona, to sprzedajemy jedynie część aktywów i-tego rodzaju, pozostawiając jedynie resztę o wartości $PV(P_i')$. Także i ten fakt zmniejsza indukowaną stopę prowizji λ. Symbolem $\underline{\underline{S}}$ nazwijmy zbiór wszystkich indeksów oznaczających rodzaje sprzedawanych aktywów finansowych. Mamy tutaj

$$\underline{\underline{S}} = \{i = 1, 2, ..., n : PV(P_i). > PV(P_i')\}. \tag{21}$$

Przy wyznaczaniu ostatecznego kształtu rozdzielnych zbiorów $\underline{\underline{K}}$ i $\underline{\underline{S}}$ niezbędna jest dokładna znajomość wartości indukowanej stopy prowizji λ. Ograniczając koszta, dążymy oczywiście do możliwie małej wartości λ. Dyskutowane własności elementów zbiorów $\underline{\underline{K}}$ i $\underline{\underline{S}}$ stanowią przesłanki do konstrukcji następującego algorytmu wyznaczania minimalnej indukowanej stopy prowizji λ:

Etap (i): Podstaw

$$\lambda \leftarrow \frac{2\eta}{1+\eta}.$$

Etap (ii): Podstaw

$$\lambda^* \leftarrow \frac{2\eta}{1+\eta} \sum_{i \in \underline{\underline{S}}} (\alpha_i - \alpha_i'(1-\lambda)).$$

Etap (iii): Jeśli jest spełniony warunek

$$\lambda^* \geq \lambda,$$

to wyznaczona wartość λ jest poszukiwaną minimalną stopą prowizji.
W przeciwnym przypadku podstaw

$$\lambda \leftarrow \lambda^*$$

i wróć do *Etapu (ii)*.

Stosując powyższy algorytm, należy pamiętać o każdorazowym dostosowaniu w *Etapie (ii)* postaci zbiorów $\underline{\underline{S}}$ i $\underline{\underline{K}}$ do aktualnej wartości λ indukowanej stopy prowizji.

Wartość sprzedaży s_i każdych aktywów P_i ze zbioru $\underline{\underline{S}}$ jest opisana zależnością

$$s_i = (\alpha_i - \alpha_i'(1-\lambda))C . \tag{22}$$

Dla zbilansowania całkowitej wartości sprzedaży z całkowitą wartością zakupu wprowadzamy pojęcie wartości brutto zakupu k_j, rozumianej jako wartość netto zakupu powiększoną o łączną prowizję zapłaconą przy pozyskaniu środków pieniężnych przeznaczonych na zakup j-tego aktywa finansowego oraz przy samym zakupie tego aktywa. Mamy

$$k_j = (1+\eta)k_j' = \frac{1+\eta}{1-\eta}(\alpha_j'(1-\lambda)-\alpha_j)C . \tag{23}$$

Jeśli symbolem $x_{i,j}$ oznaczymy wartość aktywów P_i przeznaczoną na zakup aktywów P_j, to przekształcenie portfela $\widetilde{P}$ w portfel $\widetilde{P}'$ można przedstawić jako tablicę przepływów środków pieniężnych:

$$\begin{array}{c|ccccc} & k_1 & \dots & k_j & \dots & k_k \\ \hline s_1 & x_{1,1} & \dots & x_{1,j} & \dots & x_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_i & x_{i,1} & \dots & x_{i,j} & \dots & x_{i,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_s & x_{s,1} & \dots & x_{s,j} & \dots & x_{s,k} \end{array} . \tag{24}$$

Dla każdej pary $(i,j) \in \underline{\underline{S}} \times \underline{\underline{K}}$ mamy wtedy następujące warunki bilansujące:

$$x_{i,j} \geq 0 , \tag{25}$$

$$s_i = \sum_{j \in \underline{\underline{K}}} x_{i,j} , \tag{26}$$

$$k_j = \sum_{i \in \underline{\underline{S}}} x_{i,j} , \tag{27}$$

$$\sum_{i \in \underline{\underline{S}}} s_i = \sum_{j \in \underline{\underline{K}}} k_j . \tag{28}$$

Łatwo można zauważyć, że wymienione warunki bilansujące opisują zbiór decyzji dopuszczalnych $\{x_{i,j}\}$ zamkniętego zadania transportowego. Koszt przekształcenia posiadanego portfela w portfel postulowany określamy jako sumę wszystkich strat pojedynczych transakcji przeprowadzonych w celu realizacji założonej przebudowy portfela. Jeśli przyjmiemy jako cel optymalizacyjny minimalizację kosztów przebudowy portfela $\widetilde{P} \to \widetilde{P}'$, to otrzymamy minimalizowaną funkcję celu

$$\sum_{i \in \underline{\underline{S}}} \sum_{j \in \underline{\underline{K}}} x_{i,j} l_{i,j} = \sum_{i \in \underline{\underline{S}}} (1+r_i)\, s_i - \frac{1-\eta}{1+\eta} \sum_{j \in \underline{\underline{K}}} (1+r_j)\, k_j = \text{const} . \tag{29}$$

Funkcja celu jest funkcją stałą, co oznacza, że każdy dopuszczalny przepływ środków pieniężnych jest przepływem optymalnym w powyższym zadaniu transportowym.

Podsumowując rozważania tego rozdziału zauważamy, że w przypadku transformacji posiadanego portfela w postulowany portfel optymalny łączne koszty tego przekształcenia są stałe i próba ich optymalizacji nie podnosi jakości strategii inwestycyjnej.

4. Minimalizacja kosztów transformacji portfela jako kryterium optymalizacji

Przystępujemy ponownie do zadania minimalizacji określonych w poprzednim rozdziale kosztów przebudowy portfela posiadanego w portfel postulowany. Tym razem będziemy rozwiązywać nasze zadanie optymalizacyjne przyjmując, że nasz portfel postulowany nie jest kształtowany przez jakiekolwiek kryterium określające dokładny udział wartości poszczególnych aktywów w ogólnej wartości portfela. Ponownie rozważamy transakcję (12), przy czym nie dysponujemy tym razem dokładnym kształtem portfela postulowanego $\widetilde{P}'$.

Zakładamy, że stosowana metoda stawiania celów inwestycyjnych jest metodą przypisującą jedynie każdemu aktywu finansowemu jedno z trzech zaleceń: SPRZEDAJ, TRZYMAJ, KUPUJ. Jest to typowa sytuacja często spotykana nawet po zastosowaniu finezyjnych metod analizy rynku kapitałowego. Realizacja dyrektywy TRZYMAJ nie implikuje żadnych kosztów transakcji, co pozwala pominąć aktywa finansowe z taką rekomendacją. Symbolem $\underline{\underline{S}}$ oznaczmy zbiór wszystkich aktywów z rekomendacją SPRZEDAJ

$$\underline{\underline{S}} = \{i = 1, 2, ..., n: \quad \text{SPRZEDAJ } P_i\} . \tag{30}$$

Symbolem $\underline{\underline{K}}$ oznaczmy zbiór wszystkich aktywów z rekomendacją KUPUJ

$$\underline{\underline{K}} = \{j = 1, 2, ..., n: \quad \text{KUPUJ } P_j\} . \tag{31}$$

W przypadku aktywów ze zbioru $\underline{\underline{S}}$ dysponujemy liczbami s_i określającymi wartość aktywów P_i oferowanych do sprzedaży. Sprzedaż ta może jednak napotkać na barierę popytu, stworzoną przez następujące czynniki:

• zapotrzebowanie na środki pieniężne przeznaczane na zakup aktywów ze zbioru $\underline{\underline{K}}$;

• barierę popytu zgłaszanego przez rynek na aktywa P_i.

Z tego powodu liczbę s_i należy traktować jedynie jako kres górny możliwej sprzedaży.

W przypadku aktywów ze zbioru $\underline{\underline{K}}$ dysponujemy liczbami k_j określającymi górne oszacowanie wartości brutto (w sensie opisanym w rozdziale 3) skupowanego aktywa P_j. Ograniczenie to może wynikać na przykład z werbalnych ograniczeń koncentracji ryzyka. Dodatkowo zakupy te mogą być ograniczone, gdy:

– nie zostały znalezione takie aktywa ze zbioru $\underline{\underline{S}}$, które opłacałoby się w sensie warunku (8) wymienić na aktywa P_j;

– na rynku spotykamy się z nazbyt niską podażą aktywa P_j.

Z tego powodu liczbę k_j należy traktować jedynie jako kres górny możliwych zakupów. Podobnie jak w rozdziale 3, symbolem $x_{i,j}$ oznaczmy wartość środków pieniężnych pochodzących ze sprzedaży aktywa P_i i przeznaczanych na zakup aktywa P_j. Przekształcenie portfela $\widetilde{P}$ w portfel $\widetilde{P}'$ można przedstawić w postaci tablicy przepływów środków pieniężnych (24). Dla każdej pary $(i, j) \in \underline{\underline{S}} \times \underline{\underline{K}}$ mamy wtedy (25) oraz następujące warunki bilansujące:

$$s_i \geq \sum_{j \in \underline{\underline{K}}} x_{i,j} \; , \tag{32}$$

$$k_j \geq \sum_{i \in \underline{\underline{S}}} x_{i,j} \; . \tag{33}$$

Górne kresy sprzedaży i górne kresy zakupów nie bilansują się w żaden wyraźny sposób i z tego powodu do tworzonego modelu nie można wprowadzić warunku zastępującego warunek (28). Koszt przebudowy posiadanego portfela w portfel postulowany określamy jako sumę wszystkich strat pojedynczych transakcji, przeprowadzonych w celu realizacji założonej optymalizacji portfela. Przyjmując jako cel optymalizacyjny minimalizację kosztów transformacji portfela $\widetilde{P} \to \widetilde{P}'$, otrzymujemy minimalizowaną funkcję celu

$$\sum_{i \in \underline{\underline{S}}} \sum_{j \in \underline{\underline{K}}} x_{i,j} l_{i,j} \to \min \; . \tag{34}$$

Zadania (24), (25), (32)–(34) minimalizacji kosztów przebudowy portfela (MKPP) są przykładem otwartego zadania transportowego. Rozwiązując je, powinniśmy ograniczać się do transakcji (1) przynoszących ujemne straty (7). Zgodnie z zależnością (7), minimalizując koszty transformacji portfela posiadanego w portfel postulowany, preferowane powinny być transakcje zamieniające dostępne aktywa o możliwie niskiej stopie zwrotu na dopuszczalne do kupienia aktywa o możliwie wysokiej stopie zwrotu. Oznacza to, że przedstawiona powyżej procedura minimalizacji kosztów transakcyjnych prowadzi do wyznaczenia portfela z maksymalną przy danych ograniczeniach stopą zwrotu.

Spostrzeżenie to prowadzi do procedury przebudowy posiadanego portfela $\widetilde{P}$ o strukturze opisanej proporcjami (10) w postulowany portfel $\widetilde{P}^{|}$ o strukturze opisanej proporcjami (11), wyznaczonymi dokładną metodą optymalizacji portfela pomijającą koszty transakcyjne. Przy przebudowie portfela będziemy odrzucać wszystkie te transakcje, które nie będą opłacalne w rozumieniu warunku (8). W ten sposób wartość sprzedaży s_i (22) i wartość brutto zakupu k_j (23) opisują jedynie górne kresy faktycznej sprzedaży i zakupów. Zastępując teraz zbiory (30) i (31) odpowiednio zbiorami (21) i (20), określamy zadanie optymalizacyjne MKP, które ma prowadzić do minimalizacji kosztów przebudowy posiadanego portfela w portfel postulowany. Otrzymany tą drogą portfel będzie obciążony kosztami transakcji, nieprzekraczającymi kosztów przebudowy portfela do zadanego portfela optymalnego. Oznacza to, że przy uwzględnianiu kosztów transakcji portfel wskazany przez MKP może mieć wyższą stopę zwrotu niż portfel wyznaczony przez zadaną metodę optymalizacji.

5. Zakończenie

Przedstawiony model jest jedynie modelem formalnym i wymaga dalszych badań empirycznych, które pozwoliłyby dać odpowiedź na następujące pytania:

Czy wyznaczona w nim stopa zwrotu portfela rezultatów w znaczny sposób różni się od stopy zwrotu portfela wyznaczanego za pomocą różnych dokładnych metod optymalizacji portfela?

Czy łączne koszty transakcji w portfelu, będącym rozwiązaniem opisanego otwartego zadania transportowego, są znacznie niższe od kosztów transakcji prowadzących do otrzymania portfela wyznaczanego różnymi dokładnymi metodami optymalizacji portfela?

Czy spadek stopy zwrotu portfela wynikający z przyjęcia do wyznaczania strategii inwestycyjnej kryterium minimalizacji kosztów transakcyjnych jest w należyty sposób rekompensowany przez spadek kosztów transakcyjnych?

Optimization costs of switching portfolio as transportation problem

All costs generated by broker's commission are included in portfolio optimization. The value of indicated broker's commission is given as a constant point of some simple iteration process. The switching process is described as a closed transportation problem. It is proved that for a fixed ordered pair of portfolios the total costs of switching the first portfolio to the second one are constant. The strategy of optimizing indicated broker's commission is proposed. The minimal switching costs are attained by means of some kind of open transportation problem. The obtained method of cost management may be applied together with any procedure of portfolio selection. There are sketched the possibilities of correcting return rate of optimal portfolio burdened with switching costs.

Keywords: *transportation problem, financial portfolio, transaction cost, optimization portfolio switching process*