

Anna **ĆWIAKAŁA-MALYS***,
Wioletta **NOWAK***

SPOSOBY KLASYFIKACJI MODELI DEA

W artykule podjęto próbę klasyfikacji modeli badania efektywności względnej podmiotów gospodarczych, posługując się kryterium orientacji i korzyści skali. Wyróżniono zorientowane i niezorientowane modele DEA, w których przyjmuje się założenie o stałych lub zmiennych korzyściach skali. Charakterystykę modeli zorientowanych na nakłady i wyniki, które zakładają stałe korzyści przedstawiono na przykładzie modelu CCR. Model BCC natomiast został wykorzystany jako podstawowy przykład modelu zorientowanego o zmiennych korzyściach skali. W obu przypadkach przedstawiono graficzną interpretację granicy efektywności, miary efektywności oraz pierwotną i dualną postać modelu. Charakterystyki modeli niezorientowanych dokonano na przykładzie modeli addytywnych. Zaproponowano również inne kryteria podziału modeli DEA.

Słowa kluczowe: *metoda badania efektywności DEA, efektywność względna, orientacja, korzyści skali*

1. Wprowadzenie

Dla podmiotów gospodarczych funkcjonujących w warunkach gospodarki rynkowej podstawowe znaczenie ma efektywne gospodarowanie posiadanymi zasobami. Rosnąca konkurencja zmusza je do ciągłej poprawy efektywności swojej działalności.

Do oceny sytuacji finansowej podmiotu gospodarczego najczęściej stosuje się analizę wskaźnikową. Wskaźniki liczy się na podstawie danych zawartych w sprawozdaniach finansowych, a następnie porównuje do wartości otrzymanych w poprzednich okresach lub uzyskanych przez inne podmioty działające w danej branży czy też wartości wzorcowych, jeśli takie istnieją. Analiza wskaźnikowa umożliwia ocenę funkcjonowania podmiotu w czasie i przestrzeni. Najczęściej korzysta się ze

* Instytut Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Wrocławski, ul. Uniwersytecka 22/26, 50-415 Wrocław, e-mail: acwmalys@prawo.uni.wroc.pl, wnowak@prawo.uni.wroc.pl

wskaźników przedstawiających wyniki działalności podmiotu w zakresie rentowności, płynności, zadłużenia czy obrotowości.

Wskaźniki przedstawiają zależności między elementami jednego sprawozdania lub elementami różnych sprawozdań. Jednak konstrukcja wskaźników w postaci ilorazu nie pozwala na uwzględnienie jednorazowo wielu wymiarów działalności podmiotu. Ponadto w przypadku, gdy podmioty działają na rynkach zniekształconych w wyniku stosowania regulowanych cen, dotacji i braku konkurencyjności, zwykle rynkowe wskaźniki działania, takie jak rentowność i stopa zysku, nie mogą zostać użyte w celu precyzyjnego określenia ekonomicznej działalności danego podmiotu. W takiej sytuacji szczególnie użyteczna staje się ocena efektywności.

Ocena poziomu efektywności wymaga umiejętności jej pomiaru. Istnieje wiele różnych metod pomiaru efektywności działalności podmiotu gospodarczego. Zasadniczo można je podzielić na dwie grupy, tzn. metody parametryczne i nieparametryczne.

Metody parametryczne¹ stosuje się w przypadku modeli o ściśle określonej strukturze, którą trzeba zidentyfikować. Od postaci struktury zależy odpowiednio liczba estymowanych parametrów. Metody parametryczne wymagają przyjęcia założeń dotyczących postaci funkcji produkcji. Funkcja ta określa relacje między nakładami a wynikami. Daje odpowiedź na pytanie, jaki maksymalny produkt można uzyskać przy danych nakładach.

W praktyce często dla danego podmiotu nie można zaobserwować wszystkich możliwych kombinacji nakładów i wyników. Innymi słowy, trudno sprecyzować matematyczną postać funkcji produkcji. W przypadku takich podmiotów jak szpitale, uczelnie wyższe, banki itp. interpretacja funkcji produkcji staje się poza tym kłopotliwa. W związku z tym dużą aplikacyjną wartość mają nieparametryczne metody pomiaru efektywności działalności podmiotu gospodarczego, które nie wymagają znajomości funkcyjnej zależności między nakładami a wynikami. Metody nieparametryczne cechuje większa elastyczność, ponieważ stosuje się je w przypadku modeli, których struktura nie jest założona *a priori*, lecz jest dostosowywana do danych. Wśród metod nieparametrycznych ważne miejsce zajmuje metoda badania efektywności granicznej DEA (*Data Envelopment Analysis*).

Metoda ta jest stosowana do oceny efektywności podmiotów prowadzących bardzo różnorodną działalność w obszarze rolnictwa, produkcji i usług zarówno w sektorze publicznym, jak i prywatnym. Za pomocą tej metody bada się nie tylko podmioty, których podstawowym celem jest osiągnięcie zysku, ale także organizacje zajmujące się dobroczynnością czy realizujące programy społeczne.

Najczęściej metodę tę stosuje się do oceny efektywności w dziedzinie bankowości, w szkolnictwie wyższym czy opiece zdrowotnej. Niemniej jednak lista działalności prowadzonych przez badane podmioty jest bardzo długa. Metodę DEA stosuje się do

¹ Do parametrycznych metod badania efektywności zalicza się metody: SFA (*Stochastic Frontier Approach*), DFA (*Distribution-Free Approach*), TFA (*Thick Frontier Approach*) [5, s. 171].

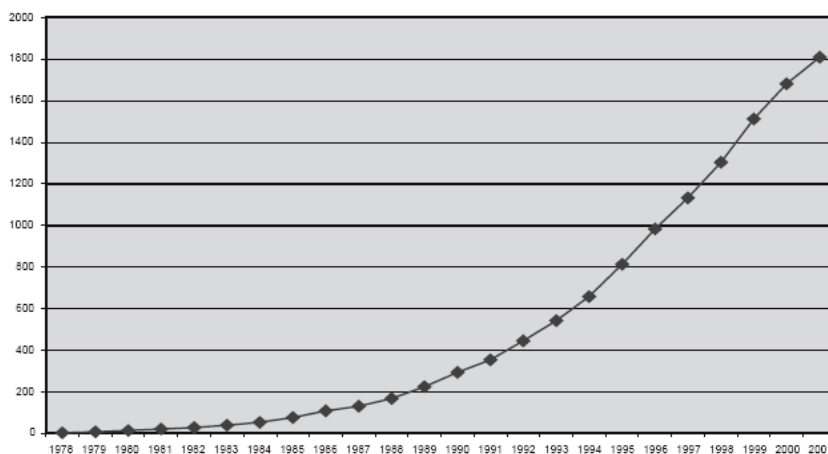
oceny działalności podmiotów w górnictwie, przetwórstwie przemysłowym, energetyce, budownictwie, transporcie, telekomunikacji, usługach ubezpieczeniowych czy administracji publicznej.

W 2008 roku minęło trzydzieści lat od czasu powstania metody DEA. W artykule pokazano główne kierunki jej rozwoju w ciągu ostatnich trzech dekad i podstawowe sposoby klasyfikacji modeli DEA.

2. Geneza metody DEA

Metodę zapoczątkowali A. Charnes, W.W. Cooper i E. Rhodes w swoim artykule z 1978 roku pt. *Measuring the efficiency of decision making units*. Co prawda metoda DEA pojawiła się w literaturze pod koniec lat 70. XX w., ale wykorzystuje koncepcję efektywności², sformułowaną 20 lat wcześniej przez Farrell'a [13].

Do połowy lat 90. XX w. odnotowano jej stopniowy rozwój zarówno w obszarze badań teoretycznych, jak i zastosowań empirycznych. Z badań wynika [15], że liczba anglojęzycznych publikacji w latach 1978–2001 rosła w sposób ekspotencjalny. Rozwój zainteresowania metodą DEA wśród naukowców w latach 1978–2001 przedstawiono na wykresie (rys. 1).

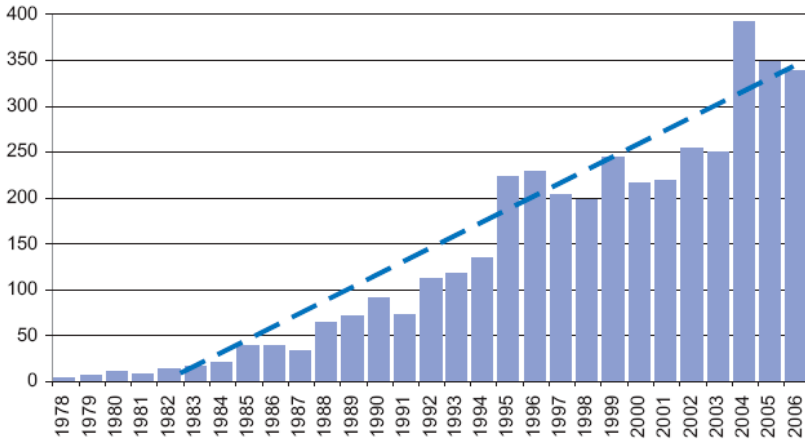


Rys. 1. Liczba opublikowanych artykułów dotyczących metody DEA, opublikowanych w recenzowanych czasopismach w latach 1978–2001

Źródło: [15, s. 143].

² Dany podmiot jest bardziej efektywny, gdy jest w stanie uzyskać te same wyniki przy użyciu mniejszej ilości nakładów lub jeśli produkuje więcej, wykorzystując ten sam zasób nakładów co inny podmiot.

A. Emrouznejad, B.R. Parker i G. Tavares [7] zwrócili uwagę na to, że intensyfikacja prac badawczych dotyczących pomiaru efektywności z wykorzystaniem metody DEA nastąpiła po 1995 r. (rys. 2).



Rys. 2. Liczba publikacji dotyczących problematyki metody DEA, zamieszczonych w najważniejszych anglojęzycznych czasopismach akademickich w latach 1978–2006
Źródło: [7, s. 153].

W ciągu ostatnich trzydziestu lat największy wkład w rozwój tej metody wnieśli: W.W. Cooper, R. Färe, S. Grosskopf, J.K. Sengupta, A. Charnes, C.A.K. Lovell, E. Thanassoulis, R.D. Banker, T. Sueyoshi, J. Zhu, W.D. Cook i L.M. Seiford³.

W Polsce metodę badania efektywności granicznej DEA w swoich pracach wykorzystywali między innymi: G. Rogowski [22]–[24], M. Gospodarowicz [16], [17], M. Pawłowska [21], A. Feruś [14], A. Domagała [6] czy B. Guzik [18].

DEA umożliwia analizę efektywności skończonej liczby jednostek decyzyjnych (DMU – *Decision Making Unit*). Definicja DMU jest elastyczna i ogólna. Przez jednostki decyzyjne rozumie się np. przedsiębiorstwa, instytucje publiczne, szkoły, biblioteki, szpitale, oddziały bankowe o różnych charakterystykach, organizacje non-profit itd.

Zbiór jednostek decyzyjnych do analizy musi być dobrany rozważnie, by można było dokonać istotnych porównań. W związku z tym grupa badanych jednostek powinna być w miarę jednolita. Metodę DEA należy stosować w przypadku jednostek, które dążą do tego samego celu oraz działają w tych samych warunkach rynkowych. Ponadto czynniki, które charakteryzują ich działalność są takie same, z wyjątkiem różnic w rozmiarze i intensywności ich stosowania.

³ Przegląd bardzo bogatego piśmiennictwa dotyczącego metody DEA jest zawarty np. w pracach [8]–[12] i [26].

Liczba badanych jednostek nie powinna być ani zbyt mała, ani zbyt duża. W przypadku zbyt małej grupy istnieje niebezpieczeństwo mylnej identyfikacji jednostek nieefektywnych jako efektywne. Za duża liczba DMU przyczynia się natomiast do zachwiania jednorodności grupy.

Metoda badania efektywności granicznej metodą DEA pozwala na analizę działalności podmiotów, które charakteryzują się wieloma nakładami i wynikami. Przyjmuje się, że poziomy nakładów i wyników są nieujemne, przy czym przynajmniej jeden nakład i jeden wynik jest dodatni. Nakłady i wyniki muszą być zdefiniowane w taki sam sposób w przypadku każdej jednostki decyzyjnej.

W metodzie DEA, na podstawie danych empirycznych, estymuje się obwiednię (krawędź) zbioru możliwości produkcyjnych. Krawędź jest wyznaczona przez jednostki mające najlepsze relacje wyników produkcji do nakładów. Estymowaną obwiednię traktuje się jako empiryczną funkcję produkcji.

Efektywność jest definiowana jako iloraz ważonej sumy wyników do ważonej sumy nakładów. Jednak w celu jej pomiaru porównuje się uzyskane przez daną jednostkę relacje wyników produkcji i nakładów do tych, które charakteryzują jednostki najlepsze w badanym zbiorze. W związku z tym wyznaczona za pomocą metody DEA efektywność ma charakter względny.

Jednostki znajdujące się na obwiedni uważa się za efektywne, a ich względna efektywność wynosi jeden (lub 100%). Jednostki nieefektywne natomiast leżą poniżej obwiedni. W ich przypadku efektywność jest mniejsza niż jeden. W metodzie DEA miarą nieefektywności jest odległość między punktem empirycznym charakteryzującym daną jednostkę, a estymowaną krawędzią zbioru możliwości produkcyjnych.

W ciągu trzydziestu lat powstało wiele rodzajów modeli DEA. W literaturze przedmiotu zaproponowano różne sposoby ich grupowania, np. w pracach [25] czy [15]. Klasyfikacja modeli zależy od przyjętego kryterium. Najczęściej stosuje się kryterium orientacji i korzyści skali.

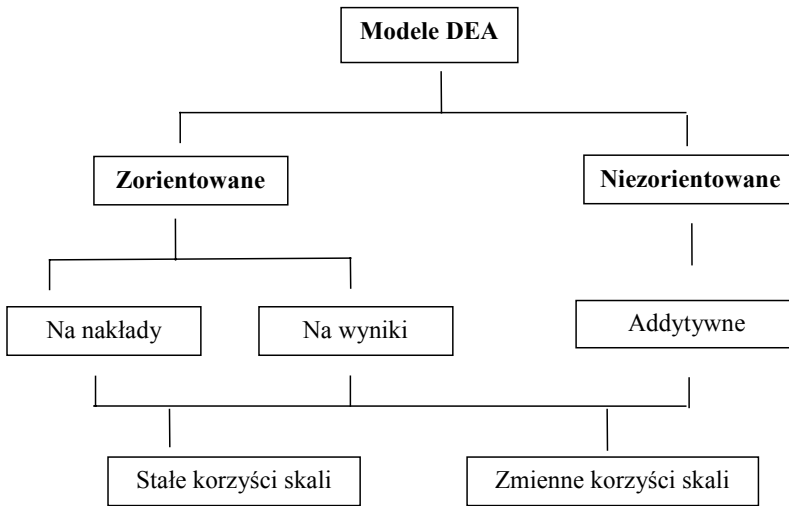
3. Podział modeli DEA ze względu na orientację i korzyści skali

Model DEA może być modelem niezorientowanym lub zorientowanym, przy czym kryterium orientacji formułuje się w odniesieniu do nakładów lub wyników. Przykładem modelu niezorientowanego jest na przykład model addytywny.

Kryterium korzyści skali umożliwia zasadniczo wyodrębnienie modeli DEA zakładających stałe (CRS – *Constant Returns to Scale*) i zmienne korzyści skali (VRS – *Variable Returns to Scale*). W grupie modeli VRS wyróżnia się modele przyjmujące założenie o malejących (DRS – *Decreasing Returns to Scale*), nierosnących (NIRS – *Non-Increasing Returns to Scale*), rosnących (IRS – *Increasing Returns to*

Scale) lub niemalejących (NDRS – *Non-Decreasing Returns to Scale*) korzyściach skali [19].

Podstawową klasyfikację modeli DEA, uwzględniającą kryterium orientacji i korzyści skali, przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Klasyfikacja modeli DEA ze względu na orientację i korzyści skali

Źródło: Opracowanie własne.

W modelach zorientowanych wartość wyniku efektywności pokazuje zmianę w nakładach lub wynikach, która sprawia, że dana jednostka staje się efektywna. Na wybór orientacji często mają wpływ uwarunkowania zewnętrzne, dotyczące badanych podmiotów.

W przypadku orientacji na nakłady uzyskuje się informacje o ile mniej jednostka efektywna zużyłaby nakładów, by osiągnąć ten sam poziom wyników co dana jednostka. Na przykład oszacowana miara efektywności na poziomie 0,9 oznacza, że dana jednostka będzie efektywna, jeśli swój dotychczasowy poziom wyników uzyska zużywając 10% mniej nakładów niż w rzeczywistości. Innymi słowy, w modelach o orientacji na nakłady, nieefektywne jednostki mogą zwiększyć swoją efektywność w wyniku redukcji nakładów.

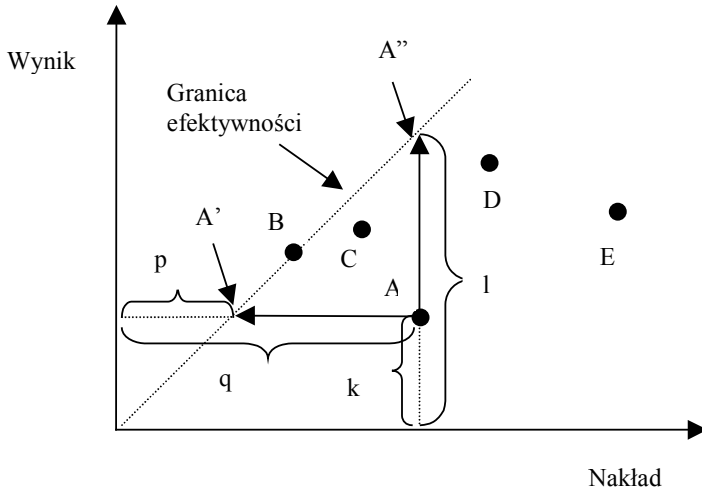
Z kolei w modelach DEA zorientowanych na wyniki otrzymuje się odpowiedź na pytanie: jaki poziom wyników uzyskałaby jednostka efektywna, gdyby wykorzystwała dostępne dla danej jednostki nakłady? Uzyskana w tym przypadku efektywność na poziomie 0,9 oznacza, że dana jednostka produkuje średnio o 10% mniej niż jednostki efektywne, wykorzystujące ten sam poziom nakładów. W modelach zorientowanych na wyniki strategia polegająca na zwiększaniu wyników przy danych nakładach prowadzi do wzrostu efektywności jednostek nieefektywnych.

W modelach zorientowanych jednostka decyzyjna jest efektywna w 100%, jeśli nie ma innej wśród badanych, która uzyskuje większe wyniki przy tej samej ilości nakładów lub te same wyniki wykorzystując mniejsze nakłady.

Podstawowym przykładem modelu zorientowanego, w którym przyjmuje się założenie o stałych korzyściach skali jest model CCR. Nazwa tego modelu pochodzi od pierwszych liter nazwisk jego autorów, tzn. Charnesa, Coopera i Rhodesa [3]. Z kolei model BCC, opracowany przez Bankera, Charnesa i Coopera [1], jest modelem zorientowanym, w którym zakłada się zmienne korzyści skali.

3.1. Model CCR i BCC

W modelu DEA, w którym zakłada się stałe korzyści skali, podejścia wykorzystujące orientacje na nakłady i wyniki są równoważne. Wyznaczona przez najlepsze w badanej grupie jednostki empiryczna funkcja produkcji jest linią prostą. Innymi słowy, na miarę efektywności nie ma wpływu wielkość jednostki. Plany produkcyjne mogą być skalowane proporcjonalnie. Każdy możliwy plan prowadzi do innego możliwego planu, jeśli wszystkie nakłady i wyniki zostaną pomnożone przez taką samą liczbę. Dla jednostki efektywnej wzrost $p\%$ nakładów prowadzi do $p\%$ wzrostu wyników.



Rys. 4. Granica i miara efektywności w najprostszym modelu CCR

Źródło: Opracowanie własne.

Sposób wyznaczania granicy efektywności oraz graficzną interpretację miary efektywności w najprostszej wersji modelu CCR przedstawiono na rysunku 4. Zaznaczono na nim wielkości nakładów i wyników dla pięciu hipotetycznych jednostek

decyzyjnych A, B, C, D i E, które wykorzystują jeden nakład x (w różnych ilościach) w celu uzyskania jednego wyniku y (o różnym poziomie). Spośród nich jednostka B charakteryzuje się najlepszą relacją wyniku do nakładu. W związku z tym jednostkę tę traktuje się jako punkt odniesienia dla pozostałych.

Efektywność względna jednostki B wynosi 1. Natomiast efektywność względną pozostałych jednostek liczy się jako stosunek efektywności danej jednostki do efektywności jednostki najlepszej, np. efektywność względną jednostki decyzyjnej A wynosi $\frac{y_A/x_A}{y_B/x_B}$.

Linia prosta przechodząca przez punkt B i początek układu współrzędnych stanowi granicę względnej efektywności. Jej nachylenie jest równe efektywności jednostki decyzyjnej B, tzn. y_B/x_B . Nieefektywna jednostka A może osiągnąć względną efektywność równą 1, jeśli wytwarzając y_A jednostek produktu zredukuje nakład x_A o $q - p$, czyli znajdzie się w punkcie A' (według modelu DEA o orientacji na nakłady) lub według modelu DEA o orientacji na wyniki, wykorzystując nakład x_A uzyska wynik o $l - k$ większy (punkt A'').

Względną efektywność jednostki A można graficznie przedstawić jako stosunek długości odcinków p i q lub k i l . Stosunek $\frac{p}{q} = \frac{y_A x_B / y_B}{x_A}$ określa efektywność względną w modelu zorientowanym na nakłady, natomiast $\frac{k}{l} = \frac{y_A}{x_A y_B / x_B}$ w przypadku orientacji na wyniki.

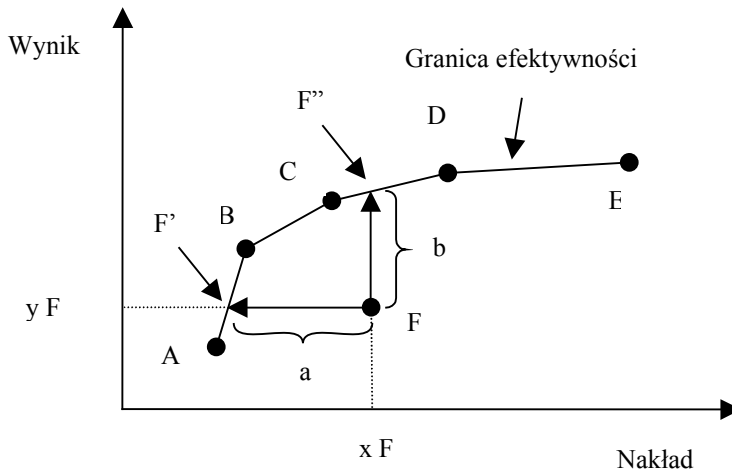
W modelu DEA, w którym przyjmuje się założenie o stałych korzyściach skali, względna efektywność danej jednostki jest taka sama w przypadku orientacji na nakłady, jak i orientacji na wyniki.

W **modelu BCC**, zakładającym zmienne korzyści skali, przyjmuje się trzy podstawowe założenia. Po pierwsze, wszystkie zaobserwowane plany produkcyjne są możliwe. Po drugie, jeśli dany plan produkcyjny jest możliwy, to każdy plan, który zużywa więcej nakładu lub pozwala uzyskać mniej wyniku jest również możliwy. Po trzecie, wypukła kombinacja istniejących planów jest możliwa. Jednostki są porównywane do istniejących planów produkcyjnych lub ich wypukłej kombinacji [20, s. 112].

Graniczną obwiednię możliwości produkcyjnych w najprostszej wersji modelu BCC przedstawiono na rysunku 5.

Na rysunku zaznaczono wielkości nakładów i wyników dla hipotetycznych jednostek decyzyjnych A, B, C, D, E i F, które wykorzystują jeden nakład w celu uzyskania jednego wyniku. Przy założeniu VRS granicę efektywności wyznaczają punkty A–E. Spośród rozważanych jednostek decyzyjnych F jest nieefektywna. Jednostka ta osiągnie efektywność względną na poziomie 100%, jeśli produkując y_F jednostek zredu-

kuje nakład x_F o wielkość a (punkt F') lub za pomocą nakładu x_F osiągnie wynik $y_F + b$ (punkt F'').



Rys. 5. Granica efektywności w jednowymiarowym modelu BCC
Źródło: Opracowanie własne.

Aby wyznaczyć wskaźnik efektywności dla danej jednostki decyzyjnej, rozwiązuje się odpowiednio sformułowane zadanie programowania nieliniowego, sprowadzalne do zadania liniowego. Przyjmuje się, że badana grupa obejmuje n jednostek decyzyjnych. Każda jednostka wykorzystuje m takich samych nakładów (w różnych ilościach) i uzyskuje s tych samych wyników (o różnych poziomach).

Efektywność j -tej jednostki decyzyjnej jest definiowana jako ważona suma jej wyników do ważonej sumy nakładów:

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}, \quad (1)$$

gdzie: zmienna u_r oznacza wagę związaną z r -tym wynikiem, zmienna v_i wagę dla i -tego nakładu, x_{ij} to i -ty nakład wykorzystywany przez j -tą jednostkę decyzyjną, y_{rj} jest r -tym wynikiem uzyskanym przez j -tą jednostkę, przy czym: $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, s$.

Dla badanego obiektu oznaczonego indeksem 0 funkcja celu zorientowanego na nakłady modeli CCR oraz BCC ma postać (2) lub (5) i odpowiednio (2') lub (5') (tab. 1). W równaniach tych przyjęto, że θ_0 jest wskaźnikiem efektywności jednostki 0. Zmiennej decyzyjnymi są wagi związane z poszczególnymi nakładami i wynikami.

W praktyce, ze względu na mniejszą liczbę ograniczeń, rozwiązuje się zagadnienie dualne. Dualna postać zlinearyzowanych modeli CCR i BCC jest opisywana za pomo-

ca łą równań (8)–(10) i (8')–(11') odpowiednio. W równaniach tych przyjęto następujące oznaczenia: zmienna decyzyjna λ_j jest wagą dla j -tej jednostki, zmienne decyzyjne s_i^- i s_r^+ , zwane luzami (*slacks*), są związane odpowiednio z i -tym wynikiem i r -tym nakładem. Niezerowe wartości luzów informują o nieefektywności technicznej jednostki.

Tabela 1. Funkcje celu w modelach CCR i BCC dla zagadnienia pierwotnego i dualnego

Orientacja na nakłady	
Model CCR – zagadnienie pierwotne	Model BCC – zagadnienie pierwotne
<ul style="list-style-type: none"> $\theta_0 = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} / \sum_{i=1}^m v_i x_{i0}$ (2) przy ograniczeniach: $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad \forall j$ (3) $u_r, v_i > \varepsilon, \quad \forall r, i$ (4) lub <ul style="list-style-type: none"> $\theta_0 = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$ (5) przy ograniczeniach: $\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1,$ (6) $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad \forall j$ (7) $u_r, v_i > \varepsilon, \quad \forall r, i$	<ul style="list-style-type: none"> $\theta_0 = \max \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{r0} - u_0 \right) / \sum_{i=1}^m v_i x_{i0}$ (2') przy ograniczeniach: $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - u_0 \leq 0, \quad \forall j$ (3') $u_r, v_i > \varepsilon, \quad \forall r, i$ (4') lub <ul style="list-style-type: none"> $\theta_0 = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} - u_0$ (5') przy ograniczeniach: $\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1,$ (6') $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - u_0 \leq 0, \quad \forall j$ (7') $u_r, v_i > \varepsilon, \quad \forall r, i$
Model CCR – zagadnienie dualne	Model BCC – zagadnienie dualne
$\min \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right)$ (8) przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0},$ (9) $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0},$ (10) $\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad \forall j, i, r,$ brak ograniczeń dla θ_0 , ε – infitezymalna stała	$\min \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right)$ (8') przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0},$ (9') $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0},$ (10') $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$ (11') $\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad \forall j, i, r,$ brak ograniczeń dla θ_0

Połączenie sposobu orientacji na nakłady z orientacją na wyniki występuje w addytywnych modelach DEA.

3.2. Modele addytywne

Modele te konstruuje się dla stałych oraz zmiennych korzyści skali. Według modelu addytywnego o stałych korzyściach skali nieefektywna jednostka A może stać się efektywną, zajmując pozycję na odcinku o końcach A' i A'' (rys. 4). Natomiast przy założeniu VRS nieefektywna jednostka F będzie efektywna, jeśli odpowiednio zredukuje swój nakład oraz jednocześnie zwiększy wynik tak, by znaleźć się na granicy efektywności między punktami F' i F'' (rys. 5).

W przypadku zmiennych korzyści skali zagadnienie dualne w addytywnym modelu DEA ma postać [4, s. 5]:

$$\max \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^-, \quad (11)$$

przy założeniu, że:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad \forall j, i, r. \quad (14)$$

W literaturze dotyczącej DEA istnieją również inne sformułowania tego typu modeli.

4. Inne kryteria podziału modeli DEA

Od 1978 roku ukazało się kilka tysięcy artykułów dotyczących metody DEA. Bogactwo i różnorodność modeli DEA prezentowanych w literaturze sprawiają, że można je grupować na wiele sposobów. Na przykład ze względu na rodzaj miary efektywności zasadniczo wyróżnia się modele DEA z radialną oraz nieradialną miarą.

Miara radialna jest stosowana np. w modelach CCR i BCC. W radialnym modelu DEA o orientacji na nakłady – nakłady są redukowane proporcjonalnie, podczas gdy wyniki pozostają stałe, natomiast w radialnym modelu o orientacji na wyniki – wyniki są proporcjonalnie zwiększane przy stałych nakładach.

W modelach nieradialnych nie ma jednolitego mnożnika dla wszystkich nakładów czy wyników. W skrajnym przypadku, np. w modelach zorientowanych na nakłady, każdy nakład może mieć inny mnożnik. Do miar nieradialnych zalicza się np. miarę efektywności opartą na luzach (*slack-based measure*) czy miarę Russella.

Modele DEA można także grupować ze względu na cechy granicy efektywności (np. deterministyczna, stochastyczna; rodzaj modelu matematycznego wykorzystanego do jej estymacji), ograniczenia nakładane na wagi związane z nakładami i wynikami, czy charakter zmiennych (np. rzeczywiste, symulowane, hipotetyczne).

5. Podsumowanie

Metoda DEA należy do najczęściej stosowanych metod określania efektywności względnej podmiotów gospodarczych. W ciągu trzydziestu lat jej istnienia sukcesywnie zwiększał się obszar jej praktycznego zastosowania.

Ze względu na to, że pomiar efektywności, zwłaszcza w przypadku dużych podmiotów gospodarczych o bogatej strukturze nakładów i wyników, jest zagadnieniem złożonym i trudnym, metoda ta nieustannie podlega modyfikacjom metodologicznym.

Bibliografia

- [1] BANKER R.D., CHARNES A., COOPER W.W., *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data development analysis*, Management Science, 1984, 30, s. 1078–1092.
- [2] BANKER R.D., COOPER W.W., SEIFORD L.M., THRALL R.M., ZHU J., *Returns to scale in different DEA models*, European Journal of Operational Research, 2004, 154, s. 345–362.
- [3] CHARNES A., COOPER W.W., RHODES E.L., *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operational Research, 1978, 2, s. 429–444.
- [4] COOK W.D., SEIFORD L.M., *Data envelopment analysis (DEA) – Thirty years on*, European Journal of Operational Research, 2009, 192, s. 1–17.
- [5] COOPER W.W., *New approaches for analyzing and evaluating the performance of financial institutions*, European Journal of Operational Research, 1997, 98, s. 170–174.
- [6] DOMAGAŁA A., *Przestrzenno-czasowa analiza efektywności jednostek decyzyjnych metodą Data Envelopment Analysis na przykładzie banków polskich*, Badania Operacyjne i Decyzje, 2007, nr 3–4, s. 35–56.
- [7] EMROUZNJAD A., PARKER B.R., TAVARES G., *Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the 30 years of scholarly literature in DEA*, Socio-Economic Planning Sciences, 2008, 42, s. 151–157.

- [8] EMROUZNEJAD A., THANASSOULIS E., *An extensive bibliography of Data Envelopment Analysis (DEA)*, Working papers, Working Paper, University of Warwick, 1996, Vol. 1, s. 1–55.
- [9] EMROUZNEJAD A., THANASSOULIS E., *An extensive bibliography of Data Envelopment Analysis (DEA)*, Journals papers, Working Paper, University of Warwick, 1996, Vol. II, s. 1–21.
- [10] EMROUZNEJAD A., THANASSOULIS E., *An extensive bibliography of Data Envelopment Analysis (DEA)*, Supplement 1, Working Paper, University of Warwick, 1997, Vol. III, s. 1–24.
- [11] EMROUZNEJAD A., *An extensive bibliography of Data Envelopment Analysis (DEA)*, Supplement 2, Working Paper, University of Warwick, 2001, Vol. IV, s. 1–24.
- [12] EMROUZNEJAD A., *An extensive bibliography of Data Envelopment Analysis (DEA)*, Dissertations, Working Paper, University of Warwick, 2001, Vol. V, s. 1–13.
- [13] FARRELL M.J., *The measurement of productive efficiency*, Journal of the Royal Statistical Society, 1957, Series A, 120, s. 253–290.
- [14] FERUŚ A., *Zastosowanie metody DEA do określenia poziomu ryzyka kredytowego przedsiębiorstw*, Bank i Kredyt, 2006, nr 07, s. 44–59.
- [15] GATTOUFI S., ORAL M., REISMAN A., *A taxonomy for Data Envelopment Analysis*, Socio-Economic Planning Sciences, 2004, 38(2–3), s. 141–58.
- [16] GOSPODAROWICZ M., *Procedury analizy i oceny banków. Materiały i studia*, Zeszyt NBP, 2000, nr 103.
- [17] GOSPODAROWICZ A. (red.), *Analiza i ocena banków oraz ich oddziałów*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2002.
- [18] GUZIK B., *O pewnej możliwości uwzględnienia substytucji nakładów w modelach DEA*, Badania Operacyjne i Decyzje, 2007, nr 3–4, s. 71–92.
- [19] KLEINE A., *A general model framework for DEA*, Omega, 2004, nr 32, s. 17–23.
- [20] KORHONEN P.J., SYRJÄNEN M.J., *Evaluation of Cost Efficiency in Finnish Electricity Distribution*, Annals of Operations Research, 2003, 121, s. 105–122.
- [21] PAWŁOWSKA M., *Konkurencja i efektywność na polskim rynku bankowym na tle zmian strukturalnych i technologicznych. Materiały i studia*, Zeszyt NBP, 2005, 192, s. 20–25.
- [22] ROGOWSKI G., *Metody analizy i oceny banków na potrzeby zarządzania strategicznego*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 1998.
- [23] ROGOWSKI G., *Analiza efektywności banków na potrzeby zarządzania strategicznego bankiem. Część 1. Metodologia*, Badania Operacyjne i Decyzje, 1999, nr 1.
- [24] ROGOWSKI G., *Analiza efektywności banków na potrzeby zarządzania strategicznego bankiem. Część 2. Zastosowanie metody DEA do analizy polskich banków. 1. 1994–1995*, Badania Operacyjne i Decyzje, 1999, nr 3–4.
- [25] SEIFORD L.M., *Data envelopment analysis: the evolution of the state of the art (1978–1995)*, The Journal of Productivity Analysis, 1996, 7, s. 99–137.
- [26] SEIFORD L.M., *A bibliography for Data Envelopment Analysis (1978–1996)*, Annals of Operational Research, 1997, 73, s. 393–438.
- [27] SEIFORD L.M., THRALL R.M., *Recent developments in DEA*, Journal of Econometrics, 1990, 46, s. 7–38.

Classification of Data Envelopment Analysis models

This article contains a method for classifying Data Envelopment Analysis models. Two main criteria i.e. orientation and returns to scale are used. These criteria enable distinguishing between oriented and non-oriented DEA models with constant and variable returns to scale. Basic properties of input oriented

and output oriented DEA models with constant returns to scale are illustrated using an example of the CCR model. The BCC model is used to characterize the oriented DEA model with variable returns to scale. A graphical presentation of the efficiency frontier and the efficiency measure and primal and dual programming problems are presented for both types of models. In the article an additive model is considered as an example of a non-oriented DEA model. Moreover, other ways of classifying DEA models are also shown.

Keywords: *Data Envelopment Analysis (DEA), relative efficiency, orientation, returns to scale*